

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Jordan, P.:** Über den positivistischen Begriff der Wirklichkeit. *Naturwiss.* **22**, 5—490 (1934).

**Skolem, Th.:** Die mathematische Grundlagenforschung. *Norsk mat. Tidsskr.* **16**, —92 (1934) [Norwegisch].

**Dassen, C. C.:** Réflexions sur quelques antinomies et sur la logique empiriste. *An. c. Ci. Argent.* **115**, 135—166, 199—232 u. 275—296 (1933).

**Schütte, Kurt:** Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. *Math. Ann.* **110**, 161—194 (1934).

Die Arbeit stellt den zweiten Teil der Untersuchungen dar, die bereits im Zbl. **9**, 2 Zusammenhang referiert wurden (erster Teil *Math. Ann.* **109**, 572). Durch Konstruktion eines Modells wird bewiesen: Eine nicht widerlegbare Formel der Gestalt

$$(y_1)(y_2)(Ez_1) \dots (Ez_s) \mathfrak{A}(y_1, y_2, z_1, \dots, z_s),$$

der  $n$  Formelvariable mit je höchstens  $h$  Stellen auftreten, ist in einem Bereich von  $n^{2^h-2^h}$  Individuen erfüllbar.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

**McKinsey, J. C. C.:** A reduction in number of the postulates for C. I. Lewis' system of strict implication. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 425—427 (1934).

In dem I. C. Lewisschen Formalismus für die „strict implication“ (Lewis and Langford, *Symbolic Logic*, S. 123ff.) ist das Axiom  $p < \infty \infty p$  überflüssig. Der Beweis stützt sich auf den mehrfach heranzuziehenden Umstand, daß die Lewissche Definition  $p < q \cdot \frac{p}{q} \cdot \infty \diamond (p \infty q)$  [zusammen mit dem Axiom  $pq < qp$ , der Definition  $p = q \cdot \frac{p}{q}$ :  $p < q \cdot q < p$  und der Substitutionsregel] von einer bewiesenen Formel der Gestalt  $\infty p < q$  stets auf  $\infty q < p$  führt.

*Arnold Schmidt*.

**Nelson, E. J.:** Whitehead and Russell's theory of deduction as a non-mathematical science. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 478—486 (1934).

Der Titel ist kontradiktorisch dem der B. A. Bernsteinschen Arbeit „Whitehead and Russell's theory of deduction as a mathematical science“ (*Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 480; dies. Zbl. **2**, 2) gegenübergestellt; in jener Arbeit unterwarf Bernstein eine „mathematical science“ einer Reihe von Forderungen, die in der Deduktionstheorie der Whitehead-Russellschen Principia nicht erfüllt seien, und er gab eine „Mathematisierung“ dieses Formalismus an. Nelson zeigt, daß nicht nur dieser Mathematisierungsversuch nicht gelungen ist (vgl. auch das zitierte Referat), sondern darüber hinaus die Bernsteinschen Forderungen selbst die Verwirklichung seines Zieles, die Logik ihrem Sinne zu mathematisieren, unmöglich machen. N. hebt demgegenüber hervor, daß die Principia (unter gewissen, heute allgemein angenommenen Voraussetzungen) ein deduktives System und eine präzise Formalisierung der Logik darboten. — Bei der ausführlichen Erörterung der Stellung des Schlußprinzips innerhalb einer formalisierten Theorie fehlt leider jeder Hinweis auf die entscheidende Rolle, die bezüglich dieser Frage in der Hilbertschen Beweistheorie die Metamathematik spielt.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

### Algebra und Zahlentheorie.

**Watson, G. N.:** Proof of certain identities in combinatory analysis. *J. Indian Math. Soc.* **20**, 57—69 (1934).

Dans les papiers laissés par Ramanujan, se trouvent une série d'une quarante



taine de formules-identités, en rapport avec les identités bien connues de Roger Ramanujan:

$$\frac{1}{G(x)} = (1-x)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^9)(1-x^{11}) \dots,$$

$$\frac{1}{H(x)} = (1-x^2)(1-x^3)(1-x^7)(1-x^8)(1-x^{12}) \dots,$$

dans lesquelles  $G(x)$  et  $H(x)$  sont les fonctions:

$$G(x) = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$$

$$H(x) = 1 + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^{12}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$$

Rogers a publié les preuves de neuf de ces formules. L'auteur en prouve six autres. Nous en énonçons trois de ces dernières à titre d'indication:

$$G(x)G(x^4) - xH(x)H(x^4) = \frac{1 + 2x^5 + 2x^{20} + 2x^{45} + 2x^{80} + \dots}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \dots}$$

$$G(x)H(-x) + G(-x)H(x) = \frac{2(1+x^2+x^6+x^{12}+\dots)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \dots}$$

$$G(x)H(-x) - G(-x)H(x) = \frac{2x(1+x^{10}+x^{30}+x^{60}+\dots)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \dots}$$

*S. Bays (Fribourg).*

**Oldenburger, Rufus:** Composition and rank of  $n$ -way matrices and multilinear forms. *Ann. of Math.*, II. s. 35, 622—653 (1934).

Tensors and polyadics are treated in the notation of  $n$ -way matrices. Composition of two matrices  $A$  and  $B$  relative to a common subset  $T$  of indices is attained by writing  $A = (a_{T,T})$ ,  $B = (b_{T,T})$  as 2-way matrices and taking the ordinary matrix product. The paper is mainly devoted to the various types of rank which can be defined, and their invariance. There are 52 theorems and many corollaries. *MacDuffee.*

**Oldenburger, Rufus:** Composition and rank of  $n$ -way matrices and multilinear forms. *Supplement. Ann. of Math.*, II. s. 35, 654—657 (1934).

The author obtains relations between the space ranks of certain matrices and the space ranks of their multiple composite. *MacDuffee (Columbus).*

**Hajós, György:** Ein Determinantensatz. *Mat. termézet. Értes.* 50, 231—233 u. dtsh. Zusammenfassung 239—240 (1934) [Ungarisch].

Es wird ein allgemeiner Determinantensatz bewiesen, der als Spezialfälle einen Satz von Kronecker [bewiesen von Zefuss, Rados und Hensel, *Z. Math. u. Phys.* 3, 298 (1858); *Mat. termézet. Értes.* 4, 268 bzw. *Acta math.* 14, 317], einen Satz von Schläfli und Rados [Denkschr. Akad. Wiss. Wien, 4 (2), 52 (1851); bzw. *Mat. termézet. Értes.* 16, 396], den Scholz-Hunyadyschen Satz (*Arch. Math. u. Phys.* 62, 317 bzw. *J. reine angew. Math.* 89, 47) und einen Satz von Rados (*Mat. termézet. Értes.* 46, 724) enthält. *Sz. Nagy (Szeged).*

**Conte, Luigi:** Determinanti di sostituzioni  $\theta$ -gonali. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 72, 19—24 (1934).

Determinante einer  $\theta$ -gonalen Substitution oder kurz  $\theta$ -gonale Determinante wird eine Determinante genannt, bei der zwei verschiedene Spalten das innere Produkt  $\cos^2 \theta$ , zwei gleiche Spalten das innere Produkt  $\sin^2 \theta$  ergeben. Für  $\theta = \pi/2$  erhält man eine orthogonale Determinante. Das Quadrat einer  $\theta$ -gonalen Determinante ist eine besondere zyklische Determinante, deren Wert sich leicht angeben läßt. Weitere Sätze. *L. Schrutka (Wien).*

**Castoldi, Luigi:** Sul numero degli elementi arbitrari nei più generali determinanti ortogonali simmetrici ed emisimmetrici. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. 67, 233—249 (1934).

Die allgemeinste orthogonale Determinante  $n$ -ter Ordnung wird auf eine neue (von der Cayleyschen verschiedene) Weise bestimmt. Unter anderem ergibt sich, daß

ie symmetrische, orthogonale Determinante  $n$ -ter Ordnung  $\frac{n^2}{4}$  willkürliche Elemente enthält, wenn  $n$  gerade ist, und  $\frac{n^2 - 1}{4}$ , wenn  $n$  ungerade ist. *Otto Szász.*

**Turri, Tullio:** Correlazioni reali proiettivamente identiche nel campo complesso e proiettivamente distinte nel campo reale. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 13, 143—161 (1934).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 403) dieselbe Frage für Kollocationen gestellt und durch Betrachtung der Elementarteiler gelöst. Hier stellt sich die Sache nicht so einfach. Verf. betrachtet zunächst irreduzible Korrelationen und die zugehörigen bilinearen Formen. Jede Form, die man komplex in eine Form transformieren kann, kann man reell in  $F$  oder  $-F$  transformieren. Es gibt nun zwei Typen irreduzibler Formen: Eine Form  $F$  des ersten Typus ist reell in  $-F$  transformierbar, eine Form des zweiten Typus nicht. Da  $F$  und  $-F$  dieselbe Korrelation darstellen, kann man reelle irreduzible Korrelationen, die man komplex ineinander transformieren kann, stets auch reell ineinander transformieren. — Jetzt betrachtet Verf. reduzible Formen. Zwei im Komplexen äquivalente reduzible Formen lassen sich stets als Linearverbindungen derselben irreduziblen Formen darstellen und können sich im wesentlichen nur durch die Vorzeichen der Formen vom 2. Typus unterscheiden. Die Anzahl der dabei möglichen Vorzeichenverteilungen ist dann die Anzahl der im reellen verschiedenen, im Komplexen äquivalenten Formen. Hierbei ist zu beachten, daß es bei einer Summe von äquivalenten irreduziblen Formen nur auf die Anzahl der negativen und positiven Vorzeichen, nicht aber auf deren Verteilung ankommt. Um die Anzahl der verschiedenen Korrelationen zu bestimmen, ist nur noch zu beachten, daß  $F = 0$  und  $-F = 0$  dieselbe Korrelation bedeuten. Die Anzahl der verschiedenen Korrelationen ist also im wesentlichen halb so groß als die Anzahl der verschiedenen Formen.

*Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Rossi, Francesco Saverio:** Sistemi completi di forme binarie speciali. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 72, 57—70 (1934).

Bestimmung der invarianten Formensysteme des Paares  $\Delta, Q$ , wo  $\Delta$  und  $Q$  die Hesse'schen und die Jacobischen Kovarianten einer binären kubischen Form  $f_3$  bedeuten, und der Form  $f_3^2$ . Direkte Untersuchung und Anwendung der bekannten Systeme des allgemeinen Paares  $f_2, f_3$  und der allgemeinen Form  $f_6$ . *Togliatti* (Genova).

**Rohr, Alwin von:** Über die Hilbert-Storyschen invariantenerzeugenden Prozesse. *Ber. Deutsch. Math.-Vereinigung*. 44, 152—156 (1934).

Zusammenfassung der gleichnamigen Arbeit des Verf., referiert in dies. Zbl. 8, 50.

*Griss* (Doetinchem).

**Wade jr., Thomas L.:** Syzygies for Weitzenböck's irreducible complete system of helidean concomitants for the conic, with an algebraically complete system of such concomitants. *Amer. J. Math.* 56, 349—358 (1934).

A conic  $F(x) = (ax)^2 = 0$  has eighteen irreducible concomitants among which there is a number of identities. In this paper the author obtains nine independent syzygies connecting these concomitants.

*M. S. Knebelman* (Princeton).

### ahlentheorie:

**Hardy, G. H., and E. Maitland Wright:** Leudesdorf's extension of Wolstenholme's theorem. *Corrigendum*. *J. London Math. Soc.* 9, 240 (1934).

It is pointed out that in the paper in question, Bauer's identical congruence was quoted for  $p = 2$ , the correct result being

$$\prod_{\substack{m=1 \\ (m, n)=1}}^n (x - m) \equiv (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \pmod{2^a},$$

where  $2^a \mid n$  and  $n > 2$ . The proof given there is corrected (see this Zbl. 8, 196).

*Davenport* (Cambridge).



**Pillai, S. Sivasankaranarayana:** On the sum function of the number of prime factors of  $N$ . J. Indian Math. Soc. **20**, 70—86 (1934).

Es sei  $f(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $n$ . Verf. beweist, dass in der Hardy-Ramanujanschen Formel

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^x f(n) = \log \log x + A + O \frac{1}{\log x}$$

das Restglied sich in eine nach fallenden Potenzen von  $\log x$  geordnete semikonvergente Reihe entwickeln läßt. Dasselbe Resultat wird erhalten, wenn statt  $f(n)$  die Anzahl aller in  $n$  aufgehenden Primzahlen (mehrfache mehrfach gezählt) betrachtet wird.

*Hans Heilbronn* (Bristol).

**Chowla, S.:** Contributions to the analytic theory of numbers. II. J. Indian Math. Soc. **20**, 121—128 (1934).

The subject of this paper is the behaviour of  $r_{s,k}(n)$ , the number of representations of the positive integer  $n$  as a sum of  $s$  positive  $k$ 'th powers, as  $n \rightarrow \infty$ . The unproved hypothesis that  $r_{k,k}(n) = O(n^\varepsilon)$  for every positive  $\varepsilon$  and  $k \geq 3$  is due to Hardy and Littlewood, and A. E. Western has carried out some computations which indicate that  $r_{3,3}(n) = O(\log^2 n)$ . Here it is proved that  $r_{3,3}(n) = \Omega(\log n / \log \log n)$ , and that  $r_{3,4}(n) = \Omega(\log n / \log \log n)$ . It is also shown that, if  $k$  is any fixed integer positive or negative, then the number of solutions of  $x^3 + ky^3 = n$  in positive integers is  $\Omega(\log \log n)$ . The proofs depend on elementary algebraical identities (see this Zbl. **9**, 153).

*E. C. Titchmarsh* (Oxford).

**Shah, S. M.:** Abundant numbers. J. Indian Math. Soc. **20**, 139—144 (1934).

The author sets out to establish upper and lower bounds for the proportion of abundant integers among the first  $n$  integers, for large  $n$ . The upper bound he obtains is (as he remarks in a postscript) superseded by one of Behrend's (see this Zbl. **6**, 396). The proof of the lower bound is wrong; the author makes the mistake of supposing (to take a simple example) that the number of integers not exceeding  $n$  divisible by either 6 or 20 is  $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{120} \right\rfloor$ .

*Davenport* (Cambridge).

**Košliakov, N.:** Some identities in quadratic fields. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 527 bis 530 u. engl. Zusammenfassung 530—531 (1934) [Russisch].

Für die arithmetische Funktion  $a_n = O(n^\varepsilon)$  seien  $\varphi(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ ,  $\psi(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}$  analytische Funktionen, deren angegebene Reihen für  $\tau > 1$ , wo  $s = \tau + it$  absolut konvergieren. Es sei

$$A^s \Gamma_{r_1} \left( \frac{s}{2} \right) \Gamma_{r_2}(s) \varphi(s) = A^{1-s} \Gamma_{r_1} \left( \frac{1-s}{2} \right) \Gamma_{r_2}(1-s) \psi(1-s),$$

wo 1)  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ; 2)  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ; 3)  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 0$ , die Funktionalgleichungen für welche  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  Lösungen sind. Es bezeichnen

$$\sigma(z) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n K_{r_1, r_2} \left( \frac{\mu_n z}{A^2} \right); \quad \tau(z) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{r_1, r_2} \left( \frac{\lambda_n z}{A^2} \right),$$

Funktionen, für welche  $K_{r_1, r_2}(x)$  Lösung der Integralgleichung

$$\int_0^{\infty} K_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} \frac{\Gamma_{r_1} \left( \frac{s}{2} \right) \Gamma_{r_2}(s)}{\Gamma_{r_1} \left( \frac{1-s}{2} \right) \Gamma_{r_2}(1-s)}, \quad R(s) > 0$$

ist. Verf. gibt ohne Beweis einige Eigenschaften dieser Funktionen, z. B. ist für

$$ab = \frac{1}{A^2}$$

$$\sqrt{a^3} \int_0^\infty x Y_{r_1, r_2}(ax) \left\{ \sigma(x) + \frac{\varphi(0)}{\pi} \frac{1}{x} \right\} dx = \sqrt{b^3} \int_0^\infty x Y_{r_1, r_2}(bx) \left\{ \tau(x) + \frac{\psi(0)}{\pi} \frac{1}{x} \right\} dx,$$

o  $Y_{r_1, r_2}$  ist Lösung der Integralgleichung

$$Y_{r_1, r_2}(x) x^{s-1} dx = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma_{r_1} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \Gamma_{r_2}(2-s)}, \quad 0 < R(s) < 1 + \frac{1+r_2}{|1-r_1| \cdot (r_1+2r_2)}.$$

uch ist für  $m > 0$

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \lambda_n^{4m+1} \sigma(\lambda_n) = \frac{2^{r_1-1} A^{8m+2}}{\sqrt{\pi} r_1} \frac{\psi(4m+2)}{G(4m+2)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \lambda_n \sigma(\lambda_n) = \frac{2^{r_1-1} A^2}{\sqrt{\pi} r_1} \frac{\psi(2)}{G(2)} - \frac{\varphi^2(0)}{2\pi},$$

$$G(s) = \frac{\Gamma_{r_1} \left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma_{r_2}(1-s)}{\Gamma_{r_1} \left(\frac{s}{2}\right) \Gamma_{r_2}(s)}.$$

erf. verallgemeinert somit einige Ramanujansche Identitäten.

*Lubelski.*

**Dixon, A. L., and W. L. Ferrar:** Some summations over the lattice points of a circle. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 172—185 (1934).

Im I. Teil [Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 48—63 (1934); dies Zbl. 9, 9; weiter mit I. zitiert] haben die Verff. Identitäten abgeleitet, in welchen eine Reihe von der Gestalt

$$\sum_{n=1}^\infty r(n) (n+b)^s K_r(2\pi i \sqrt{\lambda(n+b)}) \quad \left(\text{mit } r(n) = \sum_{p+m=n} 1, \lambda > 0, b \geq 0, r(\lambda) = 0\right) \quad (1)$$

auftritt. Für solche — evtl. divergente — Reihen, haben die Verff. in I. ein „ $AB$ -Verfahren“ definiert; in dem in I. betrachteten Fall ist die Reihe (1)  $AB$ -summierbar, und die dort betrachtete Identität ist richtig, wenn unter der Reihe (1) ihre  $AB$ -Summe verstanden wird. Weiter haben sie in I. bewiesen, daß die  $(C, k)$ -Summe von (1), wenn sie existiert, mit der  $AB$ -Summe identisch ist ( $k \geq 0$ ). Um also die  $AB$ -Summe von (1) als eine Cesàro-Summe betrachten zu können, braucht man nur die  $(C, k)$ -Summierbarkeit von (1) zu beweisen; und dies geschieht im II. Teil, und zwar für alle  $k \geq 0$  mit  $s < \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}$ . — Unterwegs ergeben sich analoge Summierbarkeitssätze für Reihen, die sich von (1) dadurch unterscheiden, daß die Funktion  $K_r$  entweder durch  $J_r$  oder durch die Exponentialfunktion ersetzt wird.

*Jarník (Praha).*

## Analysis.

● **Lindelöf, Ernst:** Einführung in die höhere Analysis. Zum Selbststudium und für Studierende der ersten Semester. Nach d. ersten schwedischen u. zweiten finnischen Aufl. dtsh. hrsg. v. Egon Ulrich. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. IX, 526 S. 84 Fig. geb. RM. 16.—

Eine Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, welche bis zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung (ausschließlich der Taylorschen Formel) und bis zu den einfachsten Sätzen über bestimmte Integrale führt. Inhalt: I. Die elementaren Funktionen hierbei u. a. Stetigkeit, Rechnen mit Ungleichungen. Umkehrfunktion. Dabei werden zunächst die Irrationalzahlen als bekannt vorausgesetzt und diejenigen Sätze ohne Begründung formuliert, zu deren Beweis die Theorie der reellen Zahlen nötig ist). II. Das Rechnen mit Näherungswerten (auch abgekürzte Division). III. Kettenbrüche. IV. Über Grenzwerte hierbei auch Reihen). V. Ableitungen von Funktionen. VI. Länge, Flächeninhalt, Volumen (systematischer Aufbau). VII. Integrale und ihre Anwendungen. VIII. Der reelle Zahlbereich (Schnitttheorie). IX. Der komplexe Zahlbereich. Einige Anwendungen auf die Algebra. Abhang I. Die Elemente der Lehre von den linearen Gleichungen und den Determinanten. Abhang II. und III. Anwendung der Determinanten zur Inhaltsberechnung für Polygone und zur Volumberechnung für Polyeder.

*Haupt (Erlangen).*



**Favard, J.:** Sur la quadrature des surfaces de révolution. (57. sess., Chambéry 24. VII.—4. VIII. 1933.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 35 (1933).

**Carlson, Fritz:** Une inégalité. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 1, 1—5 (1934)  
Wenn die reellen Zahlen  $a_n$  nicht alle gleich Null sind, gilt

$$\left(\sum_1^\infty a_n\right)^4 < \pi^2 \sum_1^\infty a_n^2 \sum_1^\infty n^2 a_n^2,$$

und die Konstante  $\pi^2$  ist die bestmögliche; der Faktor  $n^2$  läßt sich sogar durch  $(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{16}$  ersetzen, aber nicht durch  $\lambda_n$ , wo  $\lambda_n/n^2$  gegen Null geht. Verschiedene Verallgemeinerungen werden kurz besprochen. *B. Jessen* (Kopenhagen).

**Severini, C.:** Sulla formula di Parseval. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19551—555 (1934).

Direkter Beweis der Abgeschlossenheit des Funktionensystems  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$   $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$  als Folgerung aus der Vitalischen Gleichung

$$x - a = \sum \left\{ \int_a^x \varphi_n(x) dx \right\}^2$$

[Rend. R. Acc. Lincei 30, ser. 5a (1921)], deren Charakter als hinreichender Bedingung für die Abgeschlossenheit des normierten Orthogonalsystems  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$  sich bereits aus der Besselschen Ungleichung ergibt. — Erweiterung auf Funktionen zweier Veränderlichen. *R. Schmidt* (Kiel).

**Winston, C.:** On mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal polynomials. Ann. of Math., II. s. 35, 658—677 (1934).

L'auteur a étudié les formules d'intégration approchée de Mehler (1863, polynômes de Jacobi), de Gourier (1883, polynômes d'Hermite) et de Dérnyts (1886, polynômes de Laguerre) qui toutes appartiennent au type de Gauss

$$\int_a^b f(x) \cdot p(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n H_{i,n} \cdot f(x_{i,n}) + R_n(f)$$

les nombres  $x_{i,n}$  étant les racines du polynôme  $\Phi_n(x)$  orthogonal dans l'intervalle  $(a, b)$  avec le poids  $p(x)$ . Il donne les bornes des coefficient  $H_{i,n}$ . L'étude de la distribution des zéros d'un polynôme de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  qui termine la note laisse à désirer: les inégalités auxquelles aboutit l'auteur sont moins précises que celles données par Josef Korous en 1928. Ainsi p. ex. la plus grande racine  $x_{n,n}$  pour laquelle Josef Korous a donné l'inégalité

$$4n + 2\alpha > x_{n,n} > (4n + 2\alpha) \left[ 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2n+\alpha}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right]$$

n'est caractérisé par l'auteur qu'ainsi:  $4n + 2\alpha > x_{n,n} > 3n + \alpha - 5$ .

*E. Kogbelliantz* (Téhéran).

**Whittaker, J. M.:** On series of polynomials. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 223 bis 239 (1934).

On dit que les polynômes  $p_i(z) \equiv \sum_{k=0}^\infty p_{ik} z^k$  forment une suite fondamentale (basic set) si un polynôme quelconque peut être mis, d'une façon unique, sous la forme d'une combinaison linéaire d'un nombre fini d'entre eux. — Les résultats principaux remarquables par leur généralité, qu'on trouve dans ce travail concernent l'ensemble des coefficients des polynômes d'une suite fondamentale. — 1°. La condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes  $p_i(z)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) forment une suite fondamentale consiste en ce qu'il existe une matrice

$$Q = \|q_{ik}\|_{i,k=0,1,2,\dots}$$

inverse à la matrice

$$P = \|p_{ik}\|_{i,k=0,1,2,\dots}$$

jouissant de la propriété que chacune de ses lignes ne contienne qu'un nombre fini éléments différents de zéro. — 2°. Une suite  $p_i(z)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) étant supposée fondamentale, toute fonction entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est développable en la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(z) Q_i f(0), \quad Q_i = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{q_{vi}}{v!} \frac{d^v}{dz^v},$$

convergente uniformément dans toute région finie, en admettant que les coefficients  $a_n$  satisfont aux inégalités de la forme  $|a_n| < \varphi(n)$ , la fonction  $\varphi(n)$  étant associée à la suite des  $p_i(z)$ . — 3°. Soit  $p_{ii}=1$ ,  $p_{ik}=0$  pour  $k > i$  et  $|p_{ik}| \leq L$  ( $i, k=0, 1, 2, \dots$ ); alors toute fonction  $f(z)$  régulière dans le cercle  $|z| < \varrho$  ( $\varrho > 1+L$ ) est développable en la série précédente à l'intérieur de ce cercle. — 4°. En posant

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \lambda(n)}{\lg n}, \quad \lambda(n) = \max_{i, k \leq n} |p_{ik}|,$$

toute fonction entière  $f(z)$  de degré inférieur à  $\frac{1}{\lambda}$  se laisse encore développer en la même série (on suppose toujours  $p_{ii}=1$ ,  $p_{ik}=0$  pour  $k > i$ ). *W. Gontcharoff.*

**Uno, Tosio, et Yosiharu Hasimoto:** Sur la série d'interpolation de Stirling. Proc. phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 268—272 (1934).

La convergence de la série

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{f(n)}{x-n} + \frac{f(-n)}{x+n} \right] \right\} \quad (1)$$

entraîne celle de la série de Stirling

$$\left. \begin{aligned} f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_{2n+1} f(-n) + \Delta_{2n+1} f(-n-1)}{2} \frac{x(x^2-1^2) \dots (x^2-n^2)}{(2n+1)!} \right. \\ \left. + \Delta_{2n+2} f(-n-1) \frac{x^2(x^2-1^2) \dots (x^2-n^2)}{(2x+2)!} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

les sommes d'ailleurs étant nécessairement égales entre elles. De même, si la série (1) est divergente vers l'infini, la série (2) l'est aussi. (La valeur de  $x$  est supposée constante). Certaines conséquences en sont tirées au sujet de l'effet du signe des erreurs d'observation sur la précision des calculs faits avec la formule de Stirling. *W. Gontcharoff.*

**Tchakaloff, L.:** Sur la structure des ensembles linéaires définis par une certaine propriété minimale. Acta math. 63, 77—97 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Verschärfung des Mittelwertsatzes für Polynome gegebenen Grades  $k$  [C. R. Acad. Sci., Paris 192, 32, 330 (1931); 195, 411 (1932); Ges. Zbl. 1, 57, 58 u. 5, 60] stellt Verf. die folgende Aufgabe. Es sei  $\psi(x)$  eine nicht wachsende Funktion mit mindestens  $n = \left[ \frac{k}{2} \right] + 1$  Wachstumsstellen, ferner sei  $\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\psi(x)$  vorhanden. Für ein beliebiges Polynom  $k$ -ten Grades  $\varphi(x)$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\psi(x) = 0$  ist ja  $\varphi(\xi) = 0$  mit passendem reellem  $\xi$ . Es werden nun die Mengen  $M_k$  bestimmt, aus denen hier  $\xi$  stets entnommen werden kann, und zwar so, daß keinem Teil von  $M_k$  dieselbe Eigenschaft zukommt. Es seien  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $P_n(x)$  die zu  $\psi(x)$  gehörigen orthogonalen Polynome. Das Resultat lautet dann: 1. Für ungerades  $k$ ,  $k > 3$ , ist die einzige Menge  $M_k$  das offene Intervall  $x_1 < x < x_n$ , wobei  $x_1$  und  $x_n$  die extremen Nullstellen von  $P_n(x)$  bezeichnen.  $M_3$  ist entweder  $x_1 \leq x < x_n$  oder  $x_1 < x \leq x_2$ . Schließlich besteht  $M_1$  aus der einzigen Stelle, welche  $P_1(x)$  zu Null macht. — 2. Für gerades  $k$ ,  $k > 2$ , gibt es unendlich viele  $M_k$ . Damit das endliche Intervall  $\alpha < x < \beta$  ein  $M_k$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\alpha$  und  $\beta$  die extremen Nullstellen von  $P_n(x) + c P_{n-1}(x) = 0$  mit passendem reellem  $c$  sind. Ferner



gibt es noch zwei  $M_k$ , die einseitig unendliche Intervalle sind:  $-\infty < x < \alpha' < x < +\infty$ , wobei  $\alpha'$  und  $\beta'$  die extremen Nullstellen von  $P_{n-1}(x)$  bezeichnen  $\alpha' < \beta'$ . In dem Fall  $k=2$  ist das Resultat etwas komplizierter. — Es folgen noch Spezialfälle, Anwendungen sowie die Behandlung des entsprechenden Problems für trigonometrische Polynome (mit konstanter Belegungsdichte). Szegő (Saint Louis, Mo.).

**San Juan, R.:** Sur le problème des moments. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1838—1839 (1934).

Der Verf. kündigt die folgende Beziehung des Momentenproblems zu einer transzendenten Interpolationsaufgabe an: Das Momentenproblem  $\mu_n = \int_0^\infty \alpha(t) t^n dt$  hat eine Lösung  $\alpha(t)$ , wenn  $\mu_n = \Gamma(np+1) \cdot g(n)$  ( $p > 0$ ), wobei  $g(z)$  in der Halbebene  $\Re z > -\gamma$  ( $\gamma < -1$ ) regulär und in ihr der Bedingung  $|g(z)| = O(e^{\rho|\theta|})$  ( $0 < \theta < \pi/p$ ) genügt. Falls die Regularitätshalbebene  $\Re z > -\gamma$  sich genügend weit nach links erstreckt, so folgt auch die Existenz einer entsprechenden Anzahl von Derivierten für  $\alpha(t)$ . Der Fall  $p=1$  wurde in der dem Ref. noch nicht zugänglichen Thèse des Verfassers behandelt. Wie der Fall  $p=1$  mit dem Laplaceschen Integral  $\int_0^\infty \alpha(t) e^{tz} dt$  zusammenhängt, so beruht die Verallgemeinerung für beliebiges positives  $p$  auf einer Übertragung von Sätzen von Lindelöf und Nörlund auf das Integral  $f(z) = \int_0^\infty \alpha(t) E_p(tz) dt$ , wobei  $E_p(z) = \sum_0^\infty z^n / \Gamma(np+1)$ . Endlich wird eine der Riemannschen analoge Umkehrformel für diese verallgemeinerten Integrale angekündigt. I. J. Schoenberg.

**Rymarenko, B.:** Sur les polynômes multiplement monotones. Rec. math. Moscou **41**, 44—46 u. franz. Zusammenfassung 47 (1934) [Russisch].

Problème mal posé, conclusions incertaines.

W. Gontcharoff (Moskau).

### Reihen:

**Broggi, Ugo:** Über die Potenz einer Potenzreihe. Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung **44**, 166—171 (1934).

Verf. gibt Formeln für die Koeffizienten der Potenzreihe, die die  $p$ -te Potenz einer gegebenen Potenzreihe formal darstellt, wobei  $p$  eine beliebige reelle oder komplexe Zahl sein kann.

G. Cimmino (Napoli).

**Babini, J.:** Über die Potenzreihen, deren Koeffizienten Polynome sind. Bol. Seminario mat. Argent. **3**, 163—173 (1933) [Spanisch].

**Rey Pastor, J.:** Bemerkungen über Potenzreihen, deren Koeffizienten ganze algebraische Funktionen sind. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **9**, 7—14 (1934) [Spanisch].

Le premier de ces deux Mémoires est consacré à l'étude de la somme des séries de type  $\sum P_m(n)z^n$ ,  $P_m(n)$  étant un polynome en  $n$  de degré  $m$ . Le problème a été traité par un grand nombre de mathématiciens à commencer par Euler; toutefois quelques-uns des résultats de Babini semblent ne pas être dénués de quelque intérêt. — Dans le second Mémoire Rey-Pastor ajoute quelques observations au Mémoire de Babini, en montrant comment quelques-uns de ses résultats peuvent être liés à des travaux antérieurs de Rey-Pastor lui-même, ce qui permet aussi d'abrégier les démonstrations.

Vlad. Bernstein (Milano).

**Venkatachaliengar, K.:** On series whose terms as well as the sumfunction are continuous in an interval, and which converges non-uniformly in every sub-interval. J. Indian Math. Soc. **20**, 173—175 (1934).

L'auteur donne une procédé de formation d'une telle série. Il consiste à faire correspondre à tout élément  $x_r$  d'un ensemble dénombrable partout dense dans l'intervalle envisagé une famille d'une infinité de termes de la série présentant tous une irrégularité au voisinage de  $x_r$ , de façon à empêcher la convergence uniforme dans ce



voisinage. Par contre la convergence ordinaire et la continuité de la somme sont assurées par le fait qu'à des valeurs de  $r$  de plus en plus grandes correspondent des singularités tendant vers zéro. En somme ce procédé s'apparente de très près au principe de la condensation des singularités.

E. Blanc (Paris).

**Spencer, H. Earl:** On convergence and oscillation of transforms of sequences of vectors. Amer. J. Math. **56**, 445—458 (1934).

This paper extends theorems of Schur [J. reine angew. Math. **151**, 82 (1920)] and Hurwitz [Amer. J. Math. **52** (1930)] on the behavior of summability definitions from sequences of numbers to sequences of vectors in  $q$ -dimensional space. For instance it is proved that if  $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(q)})$  is a sequence of  $q$ -dimensional vectors and  $A_n(t) = A_n^{(i,j)}(t)$ , ( $i, j = 1, \dots, q$ ) is a sequence of matrix functions, then

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^q A_n^{(i,j)}(t) x_n^{(j)} = \lim_n x_n^{(i)}$$

in vector sense for all sequences  $x_n$  having a limit (i. e. is a regular summability definition) if and only if (a) there exists a  $\delta > 0$  such that if  $|t - t_0| < \delta$ , it is true that  $\sum_1^{\infty} |A_n(t)|$  converges, (b) for each  $n$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} A_n(t) = 0$ , and (c)  $\lim_1^{\infty} A_n(t) = I$ , where  $I$  is the identity matrix and the norm or distance  $|A_n(t)|$  is defined so that  $\lim_n |A_n - A| = 0$  if and only if  $\lim_n A_n^{(i,j)} = A^{(i,j)}$  for  $i, j = 1, \dots, q$ . Hildebrandt (Ann Arbor).

**Obrechhoff, Nikola:** Sur la sommation des séries divergentes. Acta math. **63**, —75 (1934).

Ce mémoire apporte un développement important à la théorie de sommation des séries divergentes: deux nouveaux procédés de sommation très généraux et qui renferment comme cas particuliers les procédés classiques de Cesàro, Borel, Riesz, Mittag-Leffler y sont introduits et étudiés. Le premier, noté  $(\varphi, \lambda)$ , dépend des deux paramètres arbitraires: fonction  $\varphi(x)$  et suite infinie  $\{\lambda_n\}$ .  $\varphi(x)$  est non décroissante et continue dans  $(0, \infty)$  et  $\varphi(0) = 0$ . Si  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  pour  $x \rightarrow \infty$  elle vérifie quelque soit  $a$  fini la restriction  $\lim_{x=\infty} \varphi(x+a)/\varphi(x) = 1$ . La suite à termes positifs  $\{\lambda_n\}$  est croissante et  $\lambda_n \rightarrow \infty$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Une série  $\sum c_n$  est dite sommable  $(\varphi, \lambda)$  avec la somme  $\sigma$ , si l'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{C_{\varphi}(x)}{\varphi(x)} = \sigma, \quad \text{où} \quad C_{\varphi}(x) = \sum_{\lambda_n < x} c_n \cdot \varphi(x - \lambda_n). \quad (I)$$

En particulierisant  $\varphi(x)$  on retrouve les moyennes typiques  $(R, \lambda)$  et  $(R, l)$  de M. Riesz et en général cette définition est une source inépuisable des procédés nouveaux. Le procédé  $(\varphi, \lambda)$  est bien adapté à la sommation des séries de Dirichlet du type

$$f(s) \sim \sum a_n e^{-\lambda_n s}. \quad (1)$$

Si l'on impose certaines restrictions supplémentaires à l'allure de la transformée de Laplace de  $\varphi(x)$

$$\Phi(z) = L(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \varphi(x) dx,$$

toutes les propriétés classiques des moyennes typiques de M. Riesz se retrouvent dans les moyennes générales de Obrechhoff. Citons comme exemple l'expression de l'abaisse positive  $\alpha_{\varphi}$  de sommabilité  $(\varphi, \lambda)$  de la série (1)

$$\alpha_{\varphi} = \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{\log |A_{\varphi}(x)|}{x}, \quad \text{où} \quad A_{\varphi}(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n \varphi(x - \lambda_n).$$

Notons encore que le produit des deux séries de sommes  $\sigma$  et  $\tau$ , sommables  $(\varphi, \mu)$  et  $(\varphi, \nu)$  respectivement est sommable  $(\varphi, \lambda)$  avec la somme  $\sigma \cdot \tau$ , où

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(u) \cdot \chi(x-u) \cdot du$$

et la suite  $\{\lambda_n\}$  n'est autre que  $\{\mu_p + \nu_q\}$  ordonnée dans le sens de croissance. Le second procédé, noté  $(\varphi, h, f)$  dépend de trois fonctions arbitraires  $\varphi(x)$ ,  $h(x)$ ,  $f(x)$  qui doivent vérifier les conditions suivantes: 1)  $f(0)=0$ ,  $f(x)$  est non décroissante dans  $(0, \infty)$  et si  $f(x) \rightarrow \infty$  avec  $x \rightarrow \infty$  on doit avoir  $f(x+a)/f(x) \rightarrow 1$  2)  $\varphi(x)$  et  $|h(x)|$  sont intégrables dans  $(0, \infty)$  et 3)

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx = \int_0^\infty h(x) dx = 1.$$

Pour définir  $(\varphi, h, f)$  l'auteur introduit une suite  $\{\varphi_n(x)\}$  en posant  $\varphi_0(x) \equiv \varphi(x)$  et

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(u) \cdot h(x-u) \cdot du$$

et il forme la fonction associée à la série  $\sum_0^\infty c_n$

$$u(x) = \sum_0^\infty c_{n+1} \varphi_n(x) \quad (2)$$

supposant que (2) converge normalement dans tout intervalle fini  $(0, x)$ . Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$  n'existe pas, on considère la limite généralisée à l'aide de  $f(x)$  en posant

$$F[\varphi, h, f|x] = F(x) = \frac{1}{f(x)} \int_0^x f(x-t) \cdot u(t) dt$$

et l'on dit que  $\sum_0^\infty c_n$  est sommable  $(\varphi, h, f)$  avec la somme  $s$  si l'on a  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = s - c_0$ .

Ce procédé est du type mixte, représentant une superposition des deux sommations. Le mémoire contient beaucoup de propriétés intéressantes de  $(\varphi, h, f)$ . P. ex. le produit de deux séries sommables  $(\varphi_1, h, g_1)$  et  $(\varphi_2, h, g_2)$  respectivement est sommable  $(\varphi, h, f)$ , où  $\varphi$  est la composition des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ,  $f$  étant celle des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ . Sous la condition supplémentaire  $h(x) \geq 0$  pour  $x \geq 0$  le théorème de Mertens se généralise pour  $(\varphi, h, f)$ . En général, l'auteur a montré que les propriétés bien connues des procédés classiques appartiennent à toute une classe des procédés dépendant de paramètres arbitraires.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

**Samatan, E.: Über die Summation von Reihen.** Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 8, 249 bis 260 (1933) [Spanisch].

Rey-Pastor a indiqué en 1911 (Rev. Soc. mat. Española) que la connaissance d'une fonction  $f(n)$  telle que  $u_k/u_{k-1} = [1 - f(k-1)]/f(k)$  permet de calculer effectivement la somme de la série  $\sum u_k$ . L'auteur résout ici le problème suivant: en supposant que  $u_k/u_{k-1} = (ak+b)/(ck+d)$ , déterminer (si possible) une fonction de la forme  $f(k) = (\alpha k + \beta)/(\gamma k + \delta)$  qui satisfait à la condition de Rey-Pastor (cfr. aussi Chiellini, ce Zbl. 7, 244).

Vlad. Bernstein (Milano).

**Samatan, H.: Sur une méthode de sommation de Rey Pastor.** Ist. Lombardo, Rend., II. s. 67, 227—232 (1934).

Die Arbeit schließt an die von A. Chiellini in derselben Zeitschrift 66, 443—456 (vgl. dies. Zbl. 7, 244) an. Die von Chiellini betrachteten Fälle kommen auf den von Rey Pastor zurück. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Progression, bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder  $u_k/u_{k-1} = (ak+b)/(ck+d)$  mit  $bc - ad \neq 0$  ist, durch eine lineargebrochene Funktion  $(\alpha k + \beta)/(\gamma k + \delta)$  summiert werden kann, lautet: Wenn  $a = c$  ist, muß  $d \neq a + b$  sein; wenn  $a \neq c$  ist, muß  $bc = a(c+d)$  sein.

L. Schrutka (Wien).

**Vignaux, J. C.: Einige Sätze über das Produkt B'-summierbarer Reihen.** An. Soc. Ci. Argent. 115, 25—27 (1933) [Spanisch].

**Vignaux, J. C.: Über eine Verallgemeinerung der Abelschen Summationsmethode.** An. Soc. Ci. Argent. 115, 264—272 u. franz. Zusammenfassung 264 (1933) [Spanisch].



**Vignaux, J. C.:** Über  $B'$ -oszillierende Reihen. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 41—42 (1933) [Spanisch].

**Vignaux, J. C.:** Reihen, die mit der verallgemeinerten Le-Royschen Methode summiert werden können. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 42—43 (1933) [Spanisch].

Die Noten beschäftigen sich mit dem Borelschen Integralverfahren. Der Reihe  $\sum u_n$  wird zunächst  $\sum u_n \frac{x^n}{n!} = u(x)$  zugeordnet. Ist dies eine ganze transzendente Funktion und existiert

$$\int_0^{\infty} e^{-x} u(x) dx = s \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} |u(x)| dx,$$

so heiße  $\sum u_n$   $B'$ -summierbar bzw. absolut  $B'$ -summierbar und  $s$  die  $B'$ -Summe. Hardy zeigte bekanntlich [Quart. J. pure appl. Math. **35**, 34 (1904)], daß dann  $0 + u_0 + u_1 + \dots$  summierbar ist mit derselben Summe. Sei  $\sum u_n$  schlechthin,  $\sum v_n$  absolut  $B'$ -summierbar,  $\sum w_n$  die Cauchysche Produktreihe. Dann ist nach Hardy  $0 + w_0 + w_1 + \dots$   $B'$ -summierbar und  $w = uv$ . In Note I bemerkt Verf., daß das Vorsetzen der 0 unterbleiben kann, wenn man gewisse Beschrnktheitsannahmen über die  $u_n$  oder die  $w_n$  macht. In Note II wird eine Kombination des  $B'$ -Verfahrens mit dem Abelschen Verfahren entwickelt, die stärker ist als beide; die Rechenregeln werden dargelegt: man darf "Glieder hinzufügen und fortlassen. Schließlich einiges über Reihen, die nach dem Verfahren noch nicht summiert, sondern nur auf ein endliches Unbestimmtheitsintervall eingeeengt werden. Damit beschäftigt sich Note III für das  $B'$ -Verfahren und Note IV für eine vom Verf. gegebene Verallgemeinerung des Verfahrens von Le-Roy.

Ulrich (Göttingen).

**Vignaux, J. C.:** ber summierbare Doppelintegrale. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 43—45 (1933) [Spanisch].

Verf. Überträgt eine Verallgemeinerung des Le-Royschen Reihensummierungsverfahrens auf Doppelintegrale und gibt einen Satz über die Summierbarkeit des Produktintegrals aus einem absolut konvergenten und einem summierbaren Integral.

Ulrich (Göttingen).

**Vignaux, J. C.:** ber die beschränkte Konvergenz von Doppelreihen und Doppelintegralen. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 74—76 (1933) [Spanisch].

Von beschränkter Konvergenz wird gesprochen, wenn die Teilsummen bzw. Doppelintegrale nach Rechtecken

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} \quad \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

dem Betrage nach beschränkt bleiben. Einige Sätze über Reihen- bzw. Integralmultiplikation werden mit Hilfe jenes Begriffes ausgesprochen.

Ulrich (Göttingen).

**Vignaux, J. C.:** ber die Abel-Laplacesche Transformation für 2 Variable. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 76—78 (1933) [Spanisch].

**Vignaux, J. C.:** Ein Satz über Abel-Laplacesche Doppelintegrale. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 289—295 (1933) [Spanisch].

Einige Konvergenzaussagen über das Doppelintegral

$$f(z, w) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z\xi - w\eta} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Ulrich (Göttingen).

**Vignaux, J. C.:** ber die Summationsmethode von Sannia. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 339—341 (1933) [Spanisch].

Sätze über die Cauchyschen Produktreihen bei einer gewissen Verallgemeinerung des Borelschen Summierungsverfahrens.

Ulrich (Göttingen).

**Vignaux, J. C.:** Ein Satz über konvergente Doppelintegrale. An. Soc. Ci. Argent. **116**, 167—168 (1933) [Spanisch].

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Ramaswami, V.: Notes on Riemann's  $\zeta$ -function. J. London Math. Soc. 9, 1 bis 169 (1934).

Ohne Benutzung der bekannten Sätze der  $\zeta$ -Funktion zeigt der Verf. mittels direkter Berechnung, daß

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \Re(s) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |s| \leq 8.$$

Zuerst wird in sehr einfacher Weise gezeigt, daß für alle Werte von  $s$

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) \left[ 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{6^s} - \frac{1}{2^{s+4}} (1 - 3^{1-s}) \right] &= \\ &= 1 - \frac{1}{2^{s+4}} + \frac{s(s+1)}{6^{s+2}} \cdot \frac{3}{4} \zeta(s+2) + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\Gamma(s+2n) \zeta(s+2n)}{\Gamma(s) \Gamma(2n+1) 6^{s+2n}} - \\ &- \frac{2}{2^{s+4}} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\Gamma(s+2n) \zeta(s+2n)}{\Gamma(s) \Gamma(2n+1) 3^{s+2n}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Direkte Berechnung liefert, daß die rechte Seite von (1)  $\neq 0$  ist für  $\frac{1}{2} \leq \Re(s) \leq 8$  und  $s = 8$ , also ist  $\zeta(s) \neq 0$  in diesem Gebiet. — Als Nebenergebnis findet der Verf. eine Reihe für die Eulersche Konstante:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n+1} \frac{\zeta(2n+1)}{2^{2n+1}},$$

und er zeigt weiter, daß

$$\pi^{1-s} \Gamma(s-1) \cos \frac{\pi s}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \zeta(1-2n-s)$$

und

$$\frac{1}{4} - \frac{7}{24} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n}}.$$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Aronszajn, Natan: Sur les séries de Dirichlet à exposants linéairement indépendants. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 335—337 (1934).

L'A. démontre un théorème qui contient comme cas particuliers les théorèmes de Bohr [Acta math. 36, 197 (1913)] et Mandelbrojt [Bull. Soc. Math. France 60, 208 (1932); voir ce Zbl. 6, 253]. Soit  $D$  un domaine ouvert, simplement connexe contenu dans le demi-plan  $\sigma > 0$  ( $s = \sigma + it$ ). La suite  $\{\lambda_n\}$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ ) est dite correspondant à  $D$ , si pour toute série  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ , admettant une abscisse de convergence absolue et telle que (1)  $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$  est prolongeable et bornée dans  $D$ , les coefficients  $|a_n|$  sont bornés. Th.: Si les  $\lambda_n$  sont linéairement indépendants et si les quantités  $m_1 \lambda_{l_1} + \dots + m_k \lambda_{l_k}$  ordonnées par ordre de grandeur forment une suite  $\{\mu_p\}$  correspondant à  $D$ ; si (1) est prolongeable d'une manière méromorphe dans  $D$  et n'y prend pas trois valeurs différentes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ ; alors (1) converge pour  $\sigma > 0$  et dans ce demi-plan  $|f(s)| < \min |u_p|$ . Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Ursell, H. D.: Analysis of the conditions of generalized almost periodicity. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 535—546 (1934).

In der Arbeit von Besicovitch und Bohr wird die Klasse der  $B$ -fastperiodischen Funktionen betrachtet [Acta math. 57, 267—291 (1931)], die in der Klasse  $C_B(A)$  der  $B$ -fastperiodischen Funktionen enthalten ist [s. auch Besicovitch, Acta math. 58, 217—230 (1932); vgl. dies. Zbl. 4, 109, auch wegen der Bezeichnungen]. Es sei nun  $T = \{\tau_i\}$  eine „genügend gleichmäßige“ Folge von positiven Zahlen.  $T(x) = \overline{M}_i |f(x + \tau_i) - f(x)|$ . Im § 1 der vorliegenden Arbeit vereinfacht der Verf. mit Hilfe einer Ungleichung, welche die oberen Mittelwerte von  $|f(x)|$  und  $T(x)$  ver-



nüpft, die ursprüngliche Definition der  $\bar{B}$ -fastperiodischen Funktionen, die jetzt folgendermaßen lautet: Jedem  $\varepsilon > 0$  entspricht eine Folge  $T$ , für welche  $\bar{M}_x T(x) < \varepsilon$  ausfällt. In weiteren Paragraphen werden mit Hilfe einer analogen Ungleichung neue Beweise für bekannte Eigenschaften der  $B$ -fastperiodischen Funktionen gegeben. (Vgl. auch Besicovitch u. Bohr, dies. Zbl. 3, 157.) W. Stepanoff (Moskau).

**Stepanoff, W., und A. Tychonoff: Über die Räume der fastperiodischen Funktionen.** Rec. math. Moscou 41, 166—178 (1934).

Der Raum der beschränkten stetigen Funktionen  $f(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) werde durch die Distanz  $(f, g) = \sup_t |f(t) - g(t)|$  metrisiert, und jedem  $f(t)$  werde der Hilbertraum  $R(f)$  zugeordnet, welcher aus allen translierten Funktionen  $f_a(t) = f(a + t)$  ( $-\infty < a < \infty$ ) und deren Häufungselementen besteht. Nach einem Satz des Ref. ist  $f(t)$  dann und nur dann im Bohrschen Sinne fastperiodisch, falls  $R(f)$  kompakt ist. Im Anschluß hieran untersuchen die Verff. die in  $R(f)$  durch die Abbildungen  $g(t) \rightarrow g_a(t)$  und deren Häufungsabbildungen erzeugte abelsche Gruppe und beweisen: 1. Jeder metrische Raum einer stetigen kompakten Gruppe, die eine einparametrische überall dichte Untergruppe besitzt, ist dem Räume  $R(f)$  einer (nicht etwa eindeutigen) fastperiodischen Funktion  $f(t)$  homöomorph, 2. falls  $f(t)$  eine ganze Basis hat, ist  $R(f)$  ein Torus von der Dimension der Basis, 3. falls  $f(t)$  grenzperiodisch ist, ist  $R(f)$  ein Polenoid (vgl. auch dies. Zbl. 6, 427, unten). — Weiterhin wird ein Beispiel einer grenzperiodischen Bewegung angegeben. Bochner (Princeton).

**Neumann, J. v.: Almost periodic functions in a group. I.** Trans. Amer. Math. Soc. 53, 445—492 (1934).

Diese hochbedeutsame Arbeit verallgemeinert die Theorie der fastperiodischen Funktionen auf den Fall, wo die unabhängige Veränderliche eine beliebige abstrakte Gruppe durchläuft. Es erweist sich, daß die so entstehende Theorie mit dem klassischen Darstellungsproblem für beliebige Gruppen so eng verknüpft ist, daß die v. Neumannsche Theorie zugleich eine einfache und vollständige Lösung dieses Problems enthält. — Daß eine Beziehung der Theorie der fp. Funktionen zur Darstellungstheorie besteht, wurde schon von Weyl erkannt [vgl. insbesondere Enseignement math. 26, 239 (1927)]; die Entdeckung, daß dabei eine völlig beliebige Gruppe zugrunde gelegt werden kann, ist vielleicht das überraschendste Ergebnis der vorliegenden Arbeit und ist erst durch die Einführung eines ganz neuartigen Mittelwertbegriffes ermöglicht worden. — Die ursprüngliche Theorie der fp. Funktionen handelte von zwei Klassen von stetigen (komplexwertigen) Funktionen  $f(x)$  der reellen Veränderlichen  $x$ , nämlich 1. den reinen Schwingungen  $e^{i\lambda x}$  ( $\lambda$  beliebig reell) und 2. den fp. Funktionen, welche durch Verschiebungseigenschaften charakterisiert sind; für die v. Neumannsche Verallgemeinerung bildet die folgende von Bochner herrührende Form der Definition den Ausgangspunkt:  $f(x)$  heißt fp., wenn die Menge aller Funktionen  $\{f(x + h)\}$  ( $-\infty < h < \infty$ ) kompakt ist [d. h. wenn jede Folge  $f(x + h_n)$  eine für alle  $x$  gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält]. Der Hauptsatz der ursprünglichen Theorie besagt, daß die Klasse der reinen Schwingungen eine Basis für die Klasse aller fp. Funktionen bildet, in dem Sinne, daß die letztere Klasse die abgeschlossene Hülle  $\bar{H}\{s(x)\}$  der Menge aller endlichen Summen  $s(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$  bildet (abgeschlossene Hülle ebenfalls im Sinne der gleichmäßiger Konvergenz für alle  $x$ ). Der Beweis geschah mit Hilfe einer Fouriertheorie der fp. Funktionen, deren Ausgangspunkt die Existenz des Mittelwertes

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

für jede fp. Funktion  $f(x)$  ist. — Eine neue Begründung der Theorie der fp. Funktionen mit Hilfe der Methoden der Integralgleichungstheorie wurde von Weyl gegeben [Math. Ann. 97, 338—356 (1927)]; die reinen Schwingungen traten hierbei als die stetigen beschränkten Lösungen der Funktionalgleichung  $f(x + y) = f(x)f(y)$  auf, also als

die stetigen beschränkten Charaktere der (kommutativen) eindimensionalen Translationsgruppe, womit die Brücke zur Gruppentheorie geschlagen wurde. — v. Neumann definiert nun den Begriff einer fp. Funktion  $f(x)$  auf einer beliebigen Gruppe  $\mathfrak{G}$  und bringt ihn in Verbindung mit den Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  durch Matrizen  $D(x) = \{a_{ij}(x)\}$  mit beschränkten Elementen  $a_{ij}(x)$ . Eine (komplexwertige) Funktion  $f(x)$  heißt fastperiodisch auf  $\mathfrak{G}$ , wenn jede der beiden Funktionenklassen  $\{f(xh)\}$  und  $\{f(hx)\}$  (wo  $h$  alle Elemente von  $\mathfrak{G}$  durchläuft) auf  $\mathfrak{G}$  kompakt ist. Es erweist sich, daß die beschränkten Darstellungen identisch sind mit denjenigen Darstellungen, deren Elemente fp. sind (und überdies mit denjenigen, welche unitären Darstellungen äquivalent sind). Es ergibt sich der Hauptsatz, daß die Elemente eines Repräsentantensystems aller irreduziblen beschränkten Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  genau eine Basis (im obigen Sinne) der Klasse aller auf  $\mathfrak{G}$  fp. Funktionen bilden. — Der entscheidende Fortschritt gegenüber den früheren Darstellungstheorien, vor allem der von Peter und Weyl [Math. Ann. **97**, 737—755 (1927)], ist der, daß die Theorie von irgendwelchen topologischen Voraussetzungen über  $\mathfrak{G}$  frei ist. Daß dieses möglich ist, beruht darauf, daß es v. Neumann gelingt, ohne solche Voraussetzungen jeder fp. Funktion  $f(x)$  auf  $\mathfrak{G}$  einen Mittelwert  $M\{f(x)\}$  zuzuschreiben. Die Definition dieses Mittelwertes ist einfach die folgende: Man bilde die abgeschlossene Hülle aller endlichen Summen  $\sum \alpha_n f(h_n x k_n)$ , wo die Gewichte  $\alpha_n$  positive Zahlen mit der Summe 1 sind, während die Elemente  $h_n$  und  $k_n$  beliebig auf  $\mathfrak{G}$  gewählt sind; es zeigt sich, daß in dieser abgeschlossenen Hülle eine und nur eine Funktion existiert, welche auf  $\mathfrak{G}$  konstant ist, und der Mittelwert  $M\{f(x)\}$  wird gleich dem Wert dieser Funktion gesetzt. Nachdem dieser Mittelwert eingeführt ist und seine einfachen Eigenschaften dargetan sind, verläuft die Theorie in ihren Hauptzügen in engem Anschluß an die erwähnten Arbeiten von Weyl und Peter und Weyl. — Spezialisiert man die Theorie auf den Fall der eindimensionalen Translationsgruppe (wo wegen der Kommutativität der Gruppe) die beschränkten Gruppencharaktere die einzigen irreduziblen beschränkten Darstellungen sind, so erhält man zunächst nicht die ursprüngliche Theorie der fp. Funktionen, sondern eine Theorie, die auch viele unstetige Funktionen umfaßt, von denen übrigens keine einzige meßbar ist. Dies ist vielleicht das erstemal, daß nicht meßbare Funktionen sich in eine systematische Theorie naturgemäß einordnen. Sehr bemerkenswert ist aber, daß auch die ursprüngliche Theorie der stetigen fp. Funktionen einer reellen Veränderlichen durch Spezialisierung eines allgemeinen Ergebnisses entsteht. Die Methoden der allgemeinen Theorie liefern nämlich u. a. den Satz, daß der obige Hauptsatz für topologische Gruppen seine Gültigkeit behält, auch wenn man sich durchweg auf die Betrachtung solcher Funktionen und Darstellungen beschränkt, die bei der gewählten Topologie stetig sind. — Die Theorie eröffnet die Möglichkeit von Untersuchungen verschiedener Art. Schon in der vorliegenden Arbeit werden einige weitergehende Fragestellungen behandelt, insbesondere die interessante Frage, wie umfassend die Menge der fp. Funktionen für verschiedene Gruppen  $\mathfrak{G}$  ausfällt.

H. Bohr und B. Jessen (Kopenhagen).

### Differentialgleichungen :

● Ford, L. R.: *Differential equations*. London: Mac Graw-Hill publ. Co. 1934. 263 S. 15/-.

● Conkwright, Nelson Bush: *Differential equations*. New York: Macmillan comp. 1934. XII, 234 S. geb. \$ 1.90.

Lappo-Danilevskij, J. A.: *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*. Vol. 1. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff H. **6**, 1—256 (1934).

Le volume présent est la première partie des travaux de Lappo-Danilevskij (décédé intempestivement en 1931), que l'Académie des Sciences de l'USSR a pris soin de publier. Une grande partie de ces travaux a été inédite ou parue seulement sous formes



notes sommaires (voir par ex. ce Zbl. 1, 16; 3, 56, 57, 125). Maintenant grâce à MM. Poincaré et Kötchin, qui ont préparé ces mémoires pour l'impression, en développant en détail beaucoup de chapitres — toutes les théories de L.-D. sont mises à jour. — Les deux problèmes principaux de la théorie analytique des équations différentielles linéaires: le problème de Poincaré (la caractéristique analytique complète des solutions) et le problème inverse de Riemann, n'étaient pas résolus complètement et avec une précision algorithmique — comme on sait — depuis les travaux classiques de Fuchs, Poincaré, Riemann et jusqu'à nos jours. L.-D. a pris le chemin qui a permis un progrès décisif dans la résolution de ces questions. C'est l'utilisation comme base d'études de la théorie des fonctions des matrices qui ne constituaient antérieurement pour la plupart qu'un moyen de simplifier les formules du type classique. — Le I. I. contient trois mémoires de L.-D. I. Théorie générale des fonctions des matrices. — A) La théorie des fonctions d'une seule matrice — contient d'abord quelques faits déjà connus mais développés par L.-D. indépendamment des recherches d'autres auteurs, comme par ex. formes canoniques et nombres caractéristiques, conditions de convergence des séries de puissances, l'inversion de ces séries, la formule de Lagrange-Sylvester, à l'aide de laquelle une fonction de la matrice  $X$  (d'ordre  $n$ ):  $f(X) = \sum \alpha_\nu X^\nu$  peut être représentée par un polynôme en  $X$  du degré  $n-1$ , etc. On a outre cela des résultats nouveaux et importants sur la continuation analytique et sur les fonctions méromorphes de matrices. — B) Fonctions analytiques de plusieurs matrices variables, où on étudie les „séries des composantes“:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_\nu}$$

(coefficients numériques). Les conditions d'applicabilité du théorème d'unicité de la représentation par série de puissances sont éclaircies d'abord. Ensuite on constate un différent caractère de la convergence de ces séries (convergence absolue, semi-absolue, fonctions également holomorphes). Les opérations de la composition des séries, de la substitution des séries dans les autres séries et de l'inversion des séries, présentent des singularités algorithmiques par suite de l'incommutativité des compositions de plusieurs matrices. Tous les théorèmes correspondants sont obtenus grâce à quelques lemmes sur la majoration des fonctions des matrices. On construit ensuite les séries des matrices et des traces (la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux, égale à la somme des nombres caractéristiques) et on étudie les fonctions holomorphes, linéaires et méromorphes, présentées par ces séries. — C) Fonctions d'un ensemble dénombrable de matrices. — Théorèmes analogues à B). — II. La résolution algorithmique du problème régulier de Poincaré. — On analyse les propriétés

du système régulier  $\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^m \frac{Y U_j}{x - a_j}$  dans lequel les matrices  $U_j$  constantes sont nommées les substitutions différentielles aux points  $a_j$ . Après le parcours autour de  $a_j$  on a  $Y(\bar{x}) = V_j Y(x)$ ;  $V_j$  sont nommées substitutions intégrales. Le groupe engendré par les  $V_j$  est le groupe de monodromie du système donné. Les fonctions

$$L_b(a_{j_1}|x) = \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \log \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}}, \quad L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x - a_{j_\nu}} dx,$$

nommées hyperlogarithmes, jouent un rôle essentiel dans la suite. La matrice intégrale  $Y$  normale au point  $b$  (c.-à-d. se réduisant à  $I$  pour  $x = b$ ) est représentée par la série

$$Y_b(x) = \Phi_b \left( \begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| x \right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|x).$$

On a une représentation générale du dite matrice convergent uniformément par rapport à  $x$  dans chaque domaine fini de la surface de Riemann  $\sigma$  (au points logarithmiques

$a_1 \dots a_m$ ) qui ne contient aucun des points  $a_j$ . On a aussi le développement de la matrice inverse  $Y^{-1}(x)$  et les expressions analytiques explicites des substitutions intégrales mettant en évidence le caractère de leur dépendance des substitutions différentielles et de la configuration des points  $a_j$ . Tous ces expressions explicites manquaient jusqu'à L.-D. obtient une caractéristique analytique complète des singularités de la matrice intégrale (d'abord pour le cas où les  $U_j$  sont dans un voisinage des matrices nulles, il se délivre plus tard de cette restriction). Il démontre l'existence des matrices (substitutions exposantes) telles qu'on a  $Y_b(x) = (x - a_j)^{W_j} \bar{\Phi}^{(j)} \begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} \Phi^{(j)}$  et  $\bar{\Phi}^{(j)-1}$  restant holomorphes au point  $x = a_j$ . Les  $W_j$  sont des fonctions méromorphes des  $U_j$  dont les représentations générales sont obtenues aussi. — Le point  $x = a_j$  est considéré de la même manière. — Des exemples sont donnés enfin [entre autres le système de Gauss  $\frac{dY}{dx} = Y \left( \frac{U_1}{x - a_1} + \frac{U_2}{x - a_2} \right)$  et on effectue la sommation partielle des séries des compositions. — III. La recherche du système d'équations différentielles linéaires dans le voisinage d'un pôle de ses coefficients.

On étudie le système  $\frac{dY}{dx} = Y \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p$  (où l'on peut toujours supposer que la série  $\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p|$  converge).  $O$  est le point singulier; soit  $b$  quelque point avec  $0 < \varrho_1 \leq b \leq \varrho_2 < \infty$ . On a alors la matrice intégrale

$$Y(b|x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_{\nu} = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_{\nu}} \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \dots + p_{\mu} + \mu} x^{p_{\mu+1} + \dots + p_{\nu} + \nu - \mu} \sum_{\lambda=0}^M \alpha_{p_1 \dots p_{\mu}}^{*(\lambda)} \lg^{\lambda} b \sum_{\kappa=0}^{\nu-\mu} \alpha_{p_{\mu+1} \dots p_{\nu}}^{(\kappa)} \lg^{\kappa} x$$

pour toutes les valeurs de  $x$  d'un domaine  $L_1$  situé sur une surface au point logarithmique et pour qui on a  $\varrho_1 \leq |x| \leq \varrho_2$ . Les coefficients numériques  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  sont définis par des relations de récurrence.  $Y(b|x)$  est égal à  $I$ ;  $Y(b|x)$  est une fonction entière des matrices  $T_p$ . Il est vraiment remarquable que la série  $Y(b|x)$  qui dépend du choix de  $b$  peut être présentée comme un produit des deux séries, dont la première dépend de  $b$  et la seconde de  $x$ . C'est seulement cette seconde série qui peut être étudiée comme une solution du système. — On construit ensuite une matrice exposante  $W(b)$  telle que  $Y(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \bar{Y}(b|x)$ ;  $\bar{Y}$  étant uniforme par rapport à  $x$ .  $\bar{Y}(b|x)$ ,  $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}$  et  $W(b)$  sont également holomorphes par rapport aux  $T_p$  soumis au condition  $\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p| \leq \|\varrho\|$  ( $\varrho > 0$  assez petit).

Janczewski (Leningrad).

**Petrowsky, I.: Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes.** Rec. math. Moscou 41: 107—155 (1934).

Es werden die Integralkurven des Systems

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

in der Nähe des singulären Punktes  $O$  ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ) untersucht. Über diese Frage sind klassische Resultate, z. B. von Poincaré und Picard, bekannt, aber nur im Falle, daß die Funktionen  $\varphi_i$  analytisch sind. Für nichtanalytische  $\varphi_i$  und  $n = 2$  hat z. B. Perron [Math. Z. 15, 121 (1922); 16, 173] allgemeine Sätze erhalten. In der vorliegenden Arbeit setzt der Verf. voraus, daß  $n$  beliebig und die  $\varphi_i$  nichtanalytisch sind und löst die Frage in großer Allgemeinheit. [Dem Verf. blieben aber die späteren Perronschen Arbeiten unbekannt — Math. Z. 29, 129—160 (1929); 32, 70 bis 729 (1930) —, deren Resultate teilweise mit den seinigen zusammenfallen.] — Über



wird vorausgesetzt, daß: (A):  $\varphi_i$  und alle  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$  in der Umgebung  $R$  von 0 stetig sind und in 0 verschwinden, und zuweilen, daß (B): solche positive Zahlen  $M, \alpha$  existieren, daß überall in  $R$

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| < M \sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha$$

( $i, j = 1 \dots n$ ). Es werden die Integralkurven für  $|t| \rightarrow \infty$  oder, nach der Transformation  $\tau = e^t$  die sog. 0-Kurven (für  $\tau \rightarrow 0$  sich zu 0 nähernde Integralkurven) des Systems

$$\tau \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1 \dots) \quad (2)$$

betrachtet. — Es seien  $(\lambda_j - \lambda_j)^{oj}$  Elementarteiler der Matrix  $\|a_{ik}\| - \lambda E$ . Zuerst seien einige  $p_j > 1$  und einige  $\lambda_j$  miteinander gleich sein, nur ist  $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$  für alle  $\lambda_j$ . In allen diesen Fällen wird der Verlauf der 0-Kurven untersucht; er wird im wesentlichen von den Funktionen  $\varphi_i$  unabhängig. So z. B. im Falle, daß alle Elementarteiler reell, verschieden und vom ersten Grade sind und daß  $k$  von den Zahlen  $\lambda_i$  positiv sind, werden wir eine Mannigfaltigkeit der eine bestimmte Achse berührenden Kurven haben in der Form einer Hyperfläche von  $k$  Dimensionen, aus der eine Hyperfläche von  $k-1$  Dimensionen wegzulassen ist, weil diese Kurven eine andere Achse berühren, mit Ausnahme einer neuen  $k-2$  dimensional Fläche usw. — Wenn einige  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$  sind, so zeigen einige Beispiele, daß die Funktionen  $\varphi_i$  das Verhalten der Integralkurven wesentlich beeinflussen. Doch kann man zeigen, daß eine Hyperfläche von 0-Kurven existiert, welche durch die Matrix  $\|a_{ik}\|$  bestimmt ist. Die Dimensionszahl der Hyperfläche von 0-Kurven in der Nähe von 0 wird nicht beeinflußt durch die Gleichungen mit dem negativen reellen Teil der Diagonalkoeffizienten (wenn man auf die kanonische Form (i. e. mit der kanonisierten Matrix  $\|a_{ik}\|$ ) gebracht hat). — Anhang. Einige Resultate über das Verhalten von Integralkurven in der Nähe einer geschlossenen Integralkurve. Janczewski (Leningrad).

Sheffer, I. M.: An aspect of the theory of linear differential equations. Tôhoku Math. J. 39, 299—315 (1934).

Betrachtet werden lineare Differentialgleichungen

$$L[y(x)] \equiv y^{(k)}(x) + p_1(x) y^{(k-1)}(x) + \dots + p_k(x) y(x) = f(x),$$

wo  $p_k(x)$  und  $f(x)$  analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen  $x$  sein sollen ( $k = 1, \dots, k$ ). Zur Konstruktion der Lösungen wird ein zu  $L$  „reziproker“ Differentialausdruck

$$M[y(x)] \equiv \sum_{-\infty}^{-k} M_\nu(x) y^{(\nu)}(x)$$

gefunden, für welchen

$$LM[y] \equiv ML[y] \equiv y \quad \text{und} \quad y^{(-n)} = \int_{x_0}^x y^{(-n+1)}(t) dt$$

gilt. Soll  $M$  ist eindeutig bestimmt. Vorbehaltlich der noch zu erwähnenden Kon-

vergenzuntersuchung ergibt sich als Lösung von  $L(y) = f$  alsdann  $y(x) = \int_{x_0}^x f(t) H(x; t) dt$

$$H(x; t) = M_{-k}(x) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + M_{-(k+1)}(x) \frac{(x-t)^k}{k!} + \dots \quad (1)$$

wo  $H(x; t)$  ist analytische Funktion von  $x$  und  $t$  für alle  $x$  bzw.  $t$ , welche nicht in singuläre Punkte eines der  $p_1(x), \dots, p_k(x)$  fallen. Als Funktion von  $x$  ist  $H(x; t)$  diejenige Lösung von  $L[y] = 0$ , welche für  $x = t$  den Anfangsbedingungen  $y^{(q)} = 0, q = 0, 1, \dots, k-2 (\geq 0)$ , und  $y^{(k-1)} = 1$  genügt. Zusammen mit seinen  $(k-1)$  ersten partiellen Ableitungen nach  $t$  liefert  $H$  eine Linearbasis für die Lösungen von  $L[y] = 0$ . Entsprechend liefern — als Funktionen von  $t$  betrachtet —  $H(x; t)$  mit seinen  $(k-1)$  partiellen Ableitungen nach  $x$  eine Linearbasis für die Lösungen des gleichgesetzten, zu  $L(y)$  adjungierten Differentialdruckes

$$G[z(t)] \equiv (-1)^k z^{(k)}(t) + (-1)^{k-1} (p_1(t) z(t))^{(k-1)} + \dots$$

Bezüglich des Konvergenzverhaltens der Reihenentwicklung (1) für  $H(x, t)$  siehe folgende Feststellungen erwähnt: Es seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  die singulären Punkte  $p_\infty(x)$  und  $t$  eine von den  $\alpha_\rho$  verschiedene, im übrigen beliebig gewählte, aber sodaß festgehaltene Zahl. Als „ $t$ -Polygon“ bezeichne man den Durchschnitt aller offener  $t$  enthaltenden Halbebenen, welche von den Mittelloten der Verbindungsstrecken von  $t$  mit den  $\alpha_\rho$  gebildet werden. Dann konvergiert (1) gleichmäßig (bei festem  $t$ ) für alle  $x$  einer jeden abgeschlossenen Teilmenge des  $t$ -Polygons. Streicht man um den  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  alle diejenigen, in welchen sämtliche Lösungen der adjungierten Differentialgleichung  $G[z] = 0$  regulär sind, und bildet mit den verbleibenden  $\alpha_\rho$  das Polygon, sog. „erweitertes  $t$ -Polygon“, so konvergiert (1) sogar im letzteren. Die Menge der außerhalb des erweiterten  $t$ -Polygons liegenden Konvergenzpunktes hat höchstens die  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  als Häufungspunkte. — Systeme von linearen Differentialgleichungen lassen sich ganz entsprechend behandeln. — Ersetzt man in (1) die Faktoren  $\frac{u^x}{x!}$  durch  $u = x - t$  durch die Polynome  $P_\infty(u)$  einer sog. Appellschen Folge, so liefert auch so entstehende Reihe

$$M_{-k}(x) P_{k-1}(x-t) + M_{-(k+1)}(x) P_k(x-t) + \dots \quad (1)$$

— falls sie konvergiert — eine Lösung von  $L(y) = 0$ . Man hat so durch passende Wahl der Appellschen Folgen die Möglichkeit, den Konvergenzbereich von (1') zu modifizieren. — [Eine Folge  $\{P_\nu(x)\}$  von Polynomen heißt Appellsch, wenn  $\frac{dP_\nu(x)}{dx} = P_{\nu-1}(x)$  für  $\nu = 1, 2, \dots$ ; dabei soll  $P_\nu$  vom Grade  $\nu$  sein.] Haupt (Erlangen)

**Cope, Frances Thorndike:** Formal solutions of irregular linear differential equations. Pt. I. Amer. J. Math. 56, 411—437 (1934).

A method analogous to that used by G. D. Birkhoff in "Formal theory of irregular linear difference equations", Acta Math. 54, 205—246 (1930), is applied by the author to obtain a simpler proof of Fabry's theorem. The principal result is the following theorem: A linear homogeneous differential equation of the  $n$ -th order

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(n-i)}(x) = 0, \quad (a_0(x) \neq 0)$$

in which the coefficients  $a_i(x)$  are formal series in descending powers of  $x^{1/p}$ ,  $p$  being a positive integer, has always  $n$  linearly independent formal solutions of the general type

$$y(x) = \sum_{i=0}^k s_i(x) \log^{k-i}(x)$$

where  $k$  is a positive integer or zero, and the  $s_i(x)$  have the form

$$s_i(x) = e^{Q(x)} (b_{i-r} x^{r/mp} + b_{i-1-r} x^{(r-1)/mp} + \dots),$$

in which  $m$  is a positive integer  $\leq n$  and  $Q(x)$  is a polynomial in  $x^{1/mp}$  which is not expressible as a polynomial in  $x^{2/mp}$ ,  $x^{3/mp}$  or any higher integral power of  $x^{1/mp}$ . The complete set of  $n$  solutions consists of one or more subsets of the form

$$y_{j+1}(x) = \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i!(j-i)!} s_i(x) \log^{j-i} x. \quad (j = 0, 1, \dots)$$

The paper concludes with a note on Formal Solutions of Linear Difference Equations in which the author applies his results to the formal solution of the linear homogeneous difference equation treated by Birkhoff. I. S. Sokolnikoff (Madison).

**Lepage, Th.:** Sur certaines formes différentielles symboliques de degré et de rang  $n$  à  $2n+1$  variables. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 527—537 (1934).

Consider a set of  $2n$  symbols  $u^i, v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) subjected to Grassmann multiplication. Let a monomial  $M$  formed from  $n$  of these symbols contain  $u^i, \dots, u^i, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}$  but no other pair  $u$  and  $v$  with the same index. There are exactly  $t$  numbers  $j_1, \dots, j_t$ , which are in the range  $1, 2, \dots, n$  and are not indices in  $M$ . In  $M$  replace



ch  $i$  by the  $j$  having the same subscript. The author defines the resulting monomial  $\bar{M}$  the conjugate of  $M$ . The conjugate of a form is the sum of the conjugates of its monomials. The paper considers in particular forms of the type indicated in the title, proves that their conjugates are of that type also, and gives certain results which will be useful in extending to  $n$  variables a theory developed previously by the author in *Zbl.* 8, 14) for three variables.

*J. M. Thomas* (Durham).

**McCoy, Neal H.:** Expansions of certain differential operators. *Tôhoku Math. J.* 181—186 (1934).

In this paper the expansion of the differential operator

$$A(x, D) \equiv x^{m_1} D^{n_1} x^{m_2} D^{n_2} \dots x^{m_k} D^{n_k},$$

where the  $m_r$  are any real constants and the  $n_s$  are positive integers and  $D \equiv \frac{d}{dx}$ , in the form  $\sum_i c_i x^{M-i} D^{N-i}$  is derived  $\left(M = \sum_1^k m_r, N = \sum_1^k n_s\right)$ . Special cases of this result yield known expressions for the operators  $(x^\lambda D^\lambda)^n$ ,  $(x D)^n$  where  $\lambda, n$  are positive integers. The latter operator  $(x D)^n$  may be expanded in the form  $\sum_{i=1}^n S(n, i) x^i D^i$  where  $S(n, i)$  is the Stirling number  $\sum_{j=1}^i \frac{(-1)^{i-j}}{j! i - j!} j^n$  and a particularization of the general

result of the paper shows that this Stirling number is equal to the sum of all different products of  $n - i$  integers chosen from the first  $i$  positive integers, repetitions being allowed.

*Murnaghan* (Baltimore).

**Amaldi, Ugo:** Sulle trasformazioni degli elementi di contatto di ogni ordine e dimensione. *Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncei* 87, 374—383 (1934).

Employing methods based on the invariant theory of pfaffian systems, the author gives new proofs for a theorem of Bäcklund [*Math. Ann.* 9, 297—320 (1876)] and of Engel [*Leipzig. Ber.* 42, 192—207 (1890)].

*J. M. Thomas* (Durham).

**Pfeiffer, G.:** Sur la liaison entre les systèmes jacobiens et les systèmes jacobien généralisés des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues et les équations, systèmes d'équations linéaires en jacobien, qui possèdent des intégrales d'Hamburger. *J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine* 1, Fasc. 4, 22—22 (1934) [Ukrainisch].

Formale Theoreme über die Äquivalenz von Jacobischen Systemen linearer partieller Differentialgleichungen mit einigen linearen Gleichungen in Jacobianen.

*Janczewski* (Leningrad).

**Kantorovič, L.:** Sur une méthode de résolution approchée d'équations différentielles à dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 532—534 u. franz. Text 534—536 (1934) [Russisch].

The method of approximating solutions of boundary value problems here discussed consists in assuming the solution to be represented by some given expression involving unknown functions and determining these functions in such a way that the differential equation is satisfied along certain lines. Thus for a partial differential equation  $L[u(x, y)] = 0$ ,  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ , with given boundary conditions, we may set  $u = \sum \varphi_i(x) \psi_i(y)$ , the  $\psi_i$  being known functions, and require that the equations  $L[u(x, y_j)]$  be satisfied on certain lines  $y = y_j$ . These (ordinary) equations, with the boundary conditions, determine the  $\varphi_i$  and give an approximate solution of the problem. — The French text is a complete translation. The integrand on p. 535 should be  $L^2$ .

*E. J. McShane* (Princeton).

**Kamke, E.:** Über die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 44, 156—161 (1934).

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gehört eine, zunächst nur für ein Teilgebiet des Definitionsgebietes  $\mathfrak{G}$  gewonnene Lösung stets einer bis zum Rand von  $\mathfrak{G}$  exi-

stierenden Lösung als Teil an. Demgegenüber gibt es partielle Differentialgleichungen  $\frac{\partial z}{\partial x} + f^*(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , für welche  $f^*$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiete  $\mathfrak{G}$  mit partiellen stetigen Ableitungen sogar von jeder Ordnung versehen ist und deren Integrale, soweit sie in ganz  $\mathfrak{G}^*$  existieren, sämtlich Konstante sind; Integral-Lösungen mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung (Wazewski, T., vgl. dies. Zbl.

394). Andererseits hatte Verf. schon vorher gezeigt:  $\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  mit in stetigen  $f, f'_x, f'_y$  besitzt sicher in jedem (offenen) einfach zusammenhängenden Teilgebiete  $g$  von  $\mathfrak{G}$  ein in keinem Teilgebiete konstantes Integral (Hauptintegral), falls mit  $\mathfrak{G}$  keinen Randpunkt gemeinsam hat. Vorliegende Arbeit verallgemeinert

diesen Satz für  $\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^n f_\nu(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0, n \geq 1$ , unter gleichzeitiger Be-

seitigung der früher gemachten Einschränkung, derzufolge  $\mathfrak{G}$  einfach zusammenhängend sein sollte:  $\mathfrak{G}$  und  $g$  können irgendwelche offenen Punktmengen sein, wobei nur  $\bar{g} < \mathfrak{G}$ . Wegen der genauen Formulierung des Satzes muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Haupt (Erlangen).

**Bystrov, N.:** Über angenäherte Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Variablen. C. R. Acad. Sci. URSS 3, 12—14 u. dtsh. Text 14—17 (1934) [Russisch].

Zur angenäherten Lösung des Variationsproblems

$$\iint \int (au_x^2 + bu_y^2 + cu_z^2 + du^2 + 2fu) dx dy dz = \text{Min.}$$

mit gewissen Randbedingungen für  $u$  wird vorgeschlagen, dieses Problem in folgender Weise auf ein Variationsproblem in zwei Veränderlichen zu reduzieren: Man wählt im Integrationsbereich der  $z$  die Werte  $z_1, z_2, \dots, z_n$  und bildet eine Funktion  $U$ , die

dort die Werte  $v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_n(x, y)$  annimmt;  $U = \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) v_i(x, y)$ , wo  $\alpha_i(z)$

bekannte Polynome in  $z$  sind. Geht man mit dieser Funktion  $U$  in das Integral ein, so ergibt sich ein System von zweidimensionalen Variationsproblemen für die Funktionen  $v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_n(x, y)$ .

Rellick (Göttingen).

**Koshliakov, N. S.:** On a problem of small oscillation of a rope. Trav. Inst. phys. math. Stekloff 5, 283—294 (1934) [Russisch].

The equation for small oscillations is

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (\cos \varphi - \cos \alpha) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right\} + (\cos \varphi - \cos \alpha) \theta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

where  $(\theta, \varphi)$  are the spherical polar co-ordinates of a point on the sphere on which the rope lies, and  $c^2 = g/R$  where  $g$  is the acceleration of gravity and  $R$  is the radius of the sphere. Solutions of the form  $\theta = \Phi(\varphi) T(t)$  are considered, the equation for  $\Phi$  being a particular case of Heun's differential equation with four singular points 0, 1,  $\alpha, \infty$  the roots  $(r_1, r_2)$  of the indicial equation for these points being halves of the following pairs of quantities:  $(0, 1), (0, 0), (0, 1), (1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$ . The equation of small oscillations is also integrated by another method depending on the use of Jacobian elliptic functions of modulus  $\sin(\alpha/2)$ , their Fourier series and the Legendre polynomials.

H. Bateman (Pasadena).

**Kourensky, M.:** Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 692—697 (1934).

Verf. erhält die partielle Differentialgleichung 3. Ordnung, welcher die Funktionen  $\alpha(x, y, z)$  genügen muß, damit die Fläche  $\alpha = \text{konst.}$  einem orthogonalen System im Raum  $x, y, z$  angehört, durch Elimination der beiden Funktionen  $\beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)$  im System dreier partiellen Differentialgleichungen, das die Orthogonalität der Flächen  $\alpha = \text{konst.}, \beta = \text{konst.}, \gamma = \text{konst.}$  ausdrückt.

G. Cimmino (Napoli).



**Siddiqi, M. Raziuddin:** On the equation of heat conduction in wave-mechanics. Indian Math. Soc. **20**, 226—235 (1934).

Verf. beschäftigt sich mit der nichtlinearen Randwertaufgabe:

$$\Delta u - \frac{1}{q^2} \frac{\partial u}{\partial t} = u^2;$$

= 0 für  $x = 0$  und  $\pi$ ,  $y = 0$  und  $\pi$ ,  $z = 0$  und  $\pi$ ;  $u = f(x, y, z)$  für  $t = 0$ . Dabei ist  $q$  eine Konstante und  $f$  eine gegebene Funktion. Verf. löst (unter gewissen Voraussetzungen über  $f$ ) die Aufgabe, indem er  $u$  als sin-Reihe in  $x, y, z$  mit von  $t$  abhängigen Koeffizienten ansetzt. Für diese Koeffizienten erhält er ein dreifach-unendliches System nichtlinearer Integralgleichungen, welches durch sukzessive Approximationen gelöst wird. Der Eindeutigkeitsbeweis wird ebenfalls erbracht. Zum Schluß bemerkt Verf., daß sich nichts Wesentliches ändert, wenn auf der rechten Seite der Differentialgleichung an Stelle von  $u^2$  allgemeiner eine Potenzreihe in  $u$  mit von  $x, y, z, t$  abhängigen Koeffizienten steht.

*Erich Rothe* (Breslau).

**Carleman, Torsten:** Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger. Ark. Mat. Astron. Fys. **24 B**, Nr 11, 1—7 (1934).

Verf. unternimmt es, die Theorie von Weyl über gewöhnliche singuläre Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen zu übertragen. Hier werden seine Ergebnisse an Hand der Differentialgleichungen

$$L(u) + \lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c(p)u + \lambda u - f(p)$$

eine Funktion  $u(p)$ ,  $p = (x, y, z)$  bei unendlichem Gebiet kurz dargestellt. Diese Gleichung wird durch eine Integralgleichung ersetzt, auf welche die Methoden des Verf. aus seinem Buche (Sur les équations intégrales singulières . . .) anwendbar sind. Im „bestimmten“ Falle, in welchem  $L(u) + \lambda u = 0$  für nicht reelles  $\lambda$  keine quadratintegrierbare Lösung  $u$  besitzt, ergibt sich durch Grenzübergang vom endlichen Gebiete her die Existenz einer Spektralfunktion  $\theta(p, q/\lambda)$ , mit der insbesondere

$$L_p(\Delta \theta(p, q/\lambda)) + \int \lambda d\lambda \theta(p, q/\lambda) = 0$$

— Es wird gezeigt, daß, einem Kriterium von Weyl entsprechend, der bestimmte Fall vorliegt, wenn  $\lim_{p \rightarrow \infty} c(p)$  endlich ist. *K. Friedrichs* (Braunschweig).

**McCrea, W. H., and R. A. Newing:** Boundary conditions for the wave equation. Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 520—534 (1934).

Es handelt sich darum nachzuweisen, daß die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left( K(x, \lambda) \frac{dy}{dx} \right) - G(x, \lambda) y = 0$$

mit stetigem  $K > 0$ ,  $G$  in  $a < x < b$  für eine Folge von Eigenwerten  $\lambda$  Lösungen  $y(x)$  besitzt, die in den Endpunkten endliche Werte annehmen. (Das vorausgesetzte Randverhalten von  $K$  und  $G$  wird nicht formuliert.) Die Ergebnisse werden auf die separierte Schrödingergleichung des Wasserstoffmoleküls angewandt, um zu zeigen, daß sie die Randwerte besitzt. *K. Friedrichs* (Braunschweig).

**Mathisson, Myron:** Die Parametrixmethode in Anwendung auf hyperbolische Gleichungssysteme. Prace mat. fiz. **41**, 177—185 (1934).

Verf. bemerkt, daß seine Parametrixmethode zur Lösung des Anfangsproblems für lineare hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung [Math. Ann. **107**, (1932); vgl. dies. Zbl. **6**, 307] auch auf Systeme von solchen Gleichungen angewandt werden kann; das wird in einigen Sonderfällen genauer durchgeführt. *Friedrichs*.

**Maggi, G. A.:** La questione della superficie d'onda. Rend. Semin. mat. fis. Milano — **11** (1933).

Kurzer historischer Überblick über den Begriff Wellenfläche in der Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen. *Rellich* (Göttingen).

**Howland, R. C. J.:** Potential functions with periodicity in one coordinate. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **30**, 315—326 (1934).

For problems relating to a row of circular boundaries use is made of a set of functions  $w_s(\zeta)$  where  $w_0(\zeta) = -\log \sin(\pi \zeta)$  and  $\Gamma(s) w_s(\zeta) = (-)^s w_0^{(s)}(\zeta)$  where the index indicates the  $s$ th derivative. — For problems relating to a set of spheres use is made of a set of functions  $V_s^t(u, v)$  where  $u = \eta + i\zeta$ ,  $v = \eta - i\zeta$

$$V_s^t = 2^{t-1} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^t + \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)^t \right\} V_{s-t}$$

and  $V_n$ , which depends also on  $\xi$ , is derived from a basic function  $V_0$  by means of the equations

$$V_1 = -\frac{\partial V_0}{\partial \xi}, \quad (2s)! V_{2s} = V_0^{(2s)}, \quad (2s+1)! V_{2s+1} = V_1^{(2s)},$$

where the indices denote  $2s$  differentiations with respect to  $\xi$  the function  $V_0$  is periodic in the direction of the row of spheres and has a pole at the centre of each sphere. Expansions in series of Legendre functions are obtained for the functions  $V_s^t$ , the case in which  $s+t$  is odd being different from that in which  $s+t$  is even. — A set of functions is obtained also for a ring of circular boundaries.

*H. Bateman (Pasadena).*

**Kupradze, V.:** Lösung von Randwertproblemen für Helmholtzsche Gleichungen in den ausgenommenen Fällen. *C. R. Acad. Sci. URSS* **2**, 521—523 u. *dtsh. Text.* **524—526** (1934) [Russisch].

Ergänzungen zu den Abhandlungen des Verf., *ref. dies. Zbl.* **8**, 313. Einige Ausnahmefälle, die dort ungelöst geblieben waren, sind jetzt ausführlich untersucht.

*Janczewski (Leningrad).*

**Giraud, Georges:** Nouveaux résultats relatifs aux intégrales principales d'ordre quelconque. *C. R. Acad. Sci., Paris* **199**, 473—475 (1934).

Es sei  $G(x_1, \dots, x_m)$  eine positiv homogene Funktion der Ordnung  $-m$  ( $m \geq 1$ ) und außerhalb des Nullpunktes stetig; das über die Kugel  $\sum x_v^2 = 1$  erstreckte Integral über  $G$  möge verschwinden. 1. Es existiert dann eine positiv homogene Funktion der Ordnung  $2-m$ , so daß  $\Delta F = G$  gilt. 2. Auf der erwähnten Kugel erfülle  $G$  eine Hölderbedingung, und  $H$  sei eine Funktion mit denselben Eigenschaften wie  $G$ . Dann stellt das über den Raum genommene Integral

$$\int_{(m)} G(x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m) \cdot H(a_1, \dots, a_m) \cdot dV_a$$

eine Funktion vom selben Typus dar; dabei sind in üblicher Weise Umgebungen der Punkte  $(0, \dots, 0)$  und  $(x_1, \dots, x_m)$  auszuschließen. Beweis angedeutet. *Feller.*

**Maria, Alfred J.:** The potential of a positive mass and the weight function of Wiener. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **20**, 485—489 (1934).

$\mu$  sei eine meßbare nicht-negative, absolut additive Mengenfunktion, die auf dem Komplementärmenge einer bestimmten Kugel verschwindet.  $F$  sei die (beschränkte) Menge aller Punkte, zu denen es beliebig kleine Umgebungen mit positivem  $\mu$  gibt.  $\Sigma$  sei ein zusammenhängendes zu  $F$  fremdes Gebiet, dessen Begrenzung  $t$  in  $F$  liegt und

$$u(M) = \int_{\text{Raum}} \frac{1}{MP} d\mu(e_p).$$

Es wird der Satz bewiesen: Die obere Grenze von  $u(M)$  in  $\Sigma$  ist nicht größer als diejenige auf  $t$ .

*Willy Feller (Stockholm).*

### Differenzengleichungen:

**Cox, Elbert Frank:** The polynomial solution of the difference equation  $af(x) + bf(x) = \varphi(x)$ . *Tôhoku Math. J.* **39**, 327—348 (1934).

This paper is mainly an application of the methods of Nörlund (*Acta math.* **4**, 121—196) to obtain formal properties of the "generalized Euler polynomial" [satisfying the equation  $af(x+1) + bf(x) = (a+b)x^n$ ,  $n$  a positive integer] and of the "generalized Euler polynomial of higher order".

*C. R. Adams (Providence).*



**Li, Ta:** Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen. Acta math. **63**, 99—141 (1934).

The problem of stability of solutions of the differential system

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

has been studied by Perron [Math. Z. **29**, 129—160, case of  $a_{\nu\mu}$  constants; *ibid.* **32**, 3—728, case of  $a_{\nu\mu} = a_{\nu\mu}(t)$ ]. An analogous problem for the difference system

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

has also been investigated by Perron [J. reine angew. Math. **161**, 41—64] in the case of  $a_{\nu\mu}$  constants. The present paper treats the latter problem for the case of  $a_{\nu\mu} = a_{\nu\mu}(t)$  under the following conditions:  $t$  assumes only the values  $0, 1, 2, \dots$ ; the  $a_{\nu\mu}(t)$  and  $\varphi_\nu$  are arbitrary bounded functions (not necessarily real); the system

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) + \psi_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

where the  $\psi_\nu(t)$  are arbitrary bounded functions, always possesses at least one bounded solution. The discussion and results closely parallel those of Perron's second paper (see above).

C. R. Adams (Providence).

**Wold, H.:** Sulla correzione di Sheppard. Giorn. Ist. Ital. Attuari **5**, 304—314 (1934).

Geht man von der Voraussetzung aus:  $x^{n+1} \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x+\tau) d\tau \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) und setzt man  $M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$ ,  $\bar{M}_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i^n \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x_i+\tau) d\tau$ , so folgt aus der Euler-MacLaurinschen Formel mit Vernachlässigung des Restgliedes:

$$\bar{M}_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2i} \binom{n}{2i} \frac{M_{n-2i}}{2i+1}.$$

Ist  $g(x)$  die (Nörlundsche) Hauptlösung der Differenzengleichung  $\Delta g(x) = \varphi\left(x + \frac{\omega}{2}\right)$  und ist  $\left[ \int_0^x g(t) dt \right] \left[ \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x+\tau) d\tau \right] \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), so besteht die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(x_i) \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x_i+\tau) d\tau + R,$$

worin  $R$  den Rest aus der Euler-MacLaurinschen Formel

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \cdot \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x+\tau) d\tau = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(x_i) \int_{-\omega/2}^{+\omega/2} f(x_i+\tau) d\tau + R$$

bedeutet. Der Beweis ist leicht zu geben. In dem Sonderfall  $\varphi(x) = x^v$  ergibt sich  $B_v(x) = \omega^v B_v\left(\frac{x}{\omega} + \frac{1}{2}\right)$  ( $B_v(t)$  = Bernoullisches Polynom), woraus dann die Formeln für die Momente folgen. Setzt man  $\varphi(x) = x^{[v]} = x(x-\omega)(x-2\omega)\dots(x-\overline{v-1}\omega)$ , untersucht man also die faktoriellen Momente, so ist  $g(x) = \omega^v B_v^{(v+2)}\left(\frac{x}{\omega} + \frac{3}{2}\right)$  ( $B_v^{(v+2)}(t)$  = Bernoullisches Polynom höherer Ordnung), und die weiteren Untersuchungen erlangen nur die Kenntnis der für diese Polynome geltenden Rechenregeln. Ist endlich

$\varphi(x) = e^{xt}$ , so ist  $g(x) = \frac{\omega t}{e^{\omega t} - 1} e^{t\left(x + \frac{\omega}{2}\right)}$ . Von dieser Annahme ausgehend findet man gewisse z. T. bekannte Zusammenhänge für die Thieleschen Semiinvarianten.

F. Knoll (Wien.)

**Rey Pastor, J.:** Cumulanti multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 772—776 (1934).

The author considers the general cumulants derived from  $m$  infinite sequences  $a_{i,n}$ , ( $i=1, \dots, m$ ), by the recurrence law,  $u_n = u_{n-1}a_{1,n} + u_{n-2}a_{2,n} + \dots + u_{n-m}a_{m,n}$ . A formula giving the general solution reduces in a special case to results obtained by a more complicated method by I. J. Schwatt (see this Zbl. 7, 414). *Bennett*.

### **Funktionentheorie:**

**Birindelli, Carlo:** Una generalizzazione, per le serie, del metodo di sommazione di Nikola Obrechhoff nella teoria del prolungamento analitico. Ann. Mat. pura appl. IV. s. 13, 63—74 (1934).

La méthode de l'auteur permet de sommer  $\sum a_n z^n$  dans un domaine plus vaste que celui où est applicable une méthode semblable due à Obrechhoff et dont celle-ci est la généralisation (Annuaire de l'Univ. de Sofia 24, 1927, 1928). *Mandelbrojt*.

**Hayashi, Goro:** On the application of Weierstrass' factor-theorem. Tôhoku Math. 39, 209—223 (1934).

L'auteur observe que, lors du développement de certaines fonctions entières en produit canonique de Weierstrass, le calcul du facteur numérique extérieur présente quelques difficultés. Pour faciliter ce calcul il démontre un certain nombre de théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour que des expressions de la forme

$$\prod [1 - f_n(x)]^{\varphi_n(x)}, \quad \text{ou} \quad \prod [1 - f_n(x)] e^{\varphi_n(x)}$$

tendent vers 1 lorsque  $x \rightarrow 0$ , les fonctions  $f_n(x)$  et  $\varphi_n(x)$  étant toutes holomorphes au voisinage de  $x = 0$ . — Dans un dernier paragraphe, l'auteur étudie de plus près le développement en produit canonique de Weierstrass des fonctions entières périodiques. *Vlad. Bernstein* (Milano).

**Vignaux, J. C.:** Über den Cauchyschen Satz für Funktionen einer komplexen Variablen. An. Soc. Ci. Argent. 116, 45—47 (1933) [Spanisch].

Sind  $f(z)$  und  $g(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  regulär und ist  $g'(z_0) \neq 0$ , so gibt es dort zwei Stellen  $z_1$  und  $z_2$ , derart daß

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{g(z_1) - g(z_2)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dies ergibt sich durch Anwendung der folgenden Tatsache [für die Pompeiu (vgl. dies Zbl. 3, 300) zitiert wird!] auf eine geeignete Hilfsfunktion: Ist  $\varphi(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  regulär und  $\varphi'(z_0) = 0$ , so gibt es dort zwei verschiedene Stellen, in denen  $\varphi$  den gleichen Wert annimmt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Michel, W.:** La transformation  $w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$ . Enseignement Math. 32, 326—359 (1933).

**Varopoulo, Th.:** Sur quelques points de l'élimination. Prakt. Akad. Athēnōn 9, 75—79 (1934) [Griechisch].

Nous traitons le problème suivant: Étant donné une fonction analytique, à  $n$  branches, définie par une équation de la forme:  $g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \dots + g_n(z) = 0$ ; dont les coefficients ne sont pas tous des polynômes; une au moins des fonctions  $g_0, g_1, \dots, g_n$  est une fonction transcendante. — Quel est le nombre des fonctions algébriques exceptionnelles, définies par les équations  $a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \dots + a_k(z) = 0$ ;  $K$  étant fixe et supérieur à l'unité? — Nous obtenons la proposition suivante: Le nombre des polynômes en  $u$ , de la forme:  $a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \dots + a_k(z)$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_k$  étant tous des polynômes en  $z$ , tels que les équations

$$\begin{cases} g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \dots + g_n(z) = 0; \\ a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \dots + a_k(z) = 0; \end{cases}$$

aient un nombre fini des racines communes en  $u$ , ne peut dépasser  $2 \{C_{n+k}^k - 1\}$ ;  $n$  désignant le nombre des déterminations de la transcendante, et  $K$  celui des déterminations de la fonction algébrique considérée. *Autoreferat*.



**Macintyre, A. J., and R. Wilson:** On the order of interpolating integral functions and meromorphic functions with given poles. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 5*, 211—220 (1934).

Will man eine meromorphe Funktion mit gegebenen Polstellen und Hauptteilen feststellen, so liefert der Mittag-Lefflersche Satz eine Lösung der Aufgabe; sie bleibt aber weitgehend unbestimmt wegen der konvergenzerzeugenden Summanden, die den einzelnen Hauptteilen hinzugefügt werden. Verf. beschäftigen sich mit dem Fall, daß alle Pole einfach sind, und fragen nach einer meromorphen Funktion möglichst einer Ordnung; dafür kann eine obere Schranke gefunden werden, die natürlich auch von den Residuen abhängt. Sie stellen ferner fest, daß bei einer meromorphen Funktion gegebener endlicher Ordnung  $\rho$  der Logarithmus des Residuums  $R_n$  an der Stelle  $p_n$  von der Größenordnung  $|p_n|^\rho$  bleibt, sofern sich die Polstellen nicht allzu nahe kommen. Schließlich ergeben sich ähnliche Aussagen wie oben über die Wachstumsordnung einer ganzen Funktion, die an gegebenen Stellen  $a_n \rightarrow \infty$  gegebene Werte  $b_n$  annimmt. (Vgl. auch dies Zbl. 7, 416 Mursi-Winn.) *Ullrich* (Göttingen).

**Kobori, Akira:** Zwei Sätze über die Abschnitte der schlichten Potenzreihen. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* 17, 171—186 (1934).

Mittels einer vom Ref. benutzten Methode [*Math. Ann.* 100, 188—211 (1928)] weist Verf.: 1. Sämtliche Abschnitte einer im Kreise  $|z| < 1$  „sternigen“ Potenzreihe sind „konvex“ im Kreise  $|z| < \frac{1}{3}$ . 2. Sämtliche Abschnitte einer im Kreise  $|z| < 1$  „konvexen“ Potenzreihe sind „sternig“ im Kreise  $|z| < \frac{1}{2}$ . Beide Schranken bzw.  $\frac{1}{2}$  sind genau. *Szegő* (Saint Louis, Mo.).

**Lavrentieff, M.:** Sur deux questions extrémales. *Rec. math. Moscou* 41, 157—165 (1934).

1. Frage: Es werden alle möglichen schlichten Abbildungen  $w = f(z)$  des Kreissektors  $1 \leq |z| < r$  auf endliche Bereiche betrachtet, deren eine Randkomponente der  $|w| = 1$  ist und die ganz außerhalb dieses Kreises liegen. Welches ist das Maximum bzw. Minimum von  $|f'(1)|$ ? Antwort: Beide treten bei Abbildungen auf Bereiche ein, die von  $|w| = 1$  und einer nach  $w = 0$  weisenden Halbgeraden begrenzt werden, und zwar das Maximum, wenn  $z = -1$ , das Minimum, falls  $z = 1$  den Endpunkt des Schlitzes übergeführt werden. — 2. Frage: Es seien  $a, b$  zwei Punkte der  $z$ -Ebene,  $K$  der Kreis, der  $a, b$  zum Durchmesser hat und  $K'$  einer der von  $a$  und  $b$  begrenzten Halbkreise von  $K$ . Ferner sei  $B$  ein einfach zusammenhängender Bereich, der  $z = \infty$  enthält, dessen Rand ganz in  $K$  liegt und  $a$  und  $b$  enthält.  $w = f(z)$  die analytische Funktion, die  $B$  auf  $|w| > 1$  abbildet und bei der  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) > 0$  ist. Durch  $a$  und  $b$  wird auch der Rand von  $B$  in zwei Teile zerlegt. Bei der Abbildung werde der von  $K'$  weggekehrte in einen Bogen von  $|w| = 1$  von der Länge  $2\vartheta$  übergeführt. Welches ist das Maximum (des in der Hydrodynamik eine Rolle spielenden) Ausdruckes  $\frac{\cos \vartheta}{f'(\infty)}$ , wenn alle eben beschriebenen Bereiche  $B$  zur Konkurrenz zugelassen werden? Antwort: Es wird bei dem von  $K'$  begrenzten Schlitzbereich erreicht. — Die Lösung des ersten Problems ist in einem allgemeineren Satz von Grötzsch (siehe Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 80, 501) enthalten. Bei Behandlung beider Probleme wird eine Kontinuitätsmethode angewandt ganz entsprechend derjenigen, die der Referent in seiner Abhandlung in den *Math. Ann.* 89 angewandt hat. *K. Löwner* (Prag).

**Hodgkinson, J.:** The harmonic problem associated with the torsion of prisms: the soluble cases. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 5*, 145—149 (1934).

This paper treats the torsion problem for the region exterior to a sector of a circle. The function  $z = \frac{Z^{\lambda}(\alpha^2 Z^2 - 1)}{Z^2 - \alpha^2}$ , where  $\alpha^2 = \frac{2 - \lambda}{2 + \lambda}$ , is used to map that part of the complex  $z$  plane which remains when the sectorial area given by  $0 < |z| < 1$ ,  $\pi < \arg z < (2 - \frac{1}{2}\lambda)\pi$  is removed upon the semicircle  $0 \leq |Z| \leq 1$ ,  $-\frac{1}{2}\pi \leq \arg Z$

$\leq \frac{1}{2}\pi$  in the complex  $Z$  plane. The problem is then reduced to the solution of a harmonic problem associated with the semi-circular area in the  $Z$  plane. A special method must be used for the case  $\lambda = \frac{1}{2}$ . *Murnaghan* (Baltimore).

**Scorza Dragoni, Giuseppe:** *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplessa*. Mem. Accad. Ital. 5, 597—665 (1934).

Si

$$x = x_1 + iu_1, \quad y = y_1 + iv_1 \quad (1)$$

sont deux nombres complexes, et si l'on introduit une nouvelle unité  $j$  — indépendante de l'unité imaginaire  $i$  — dont le carré soit égal à  $-1$ , on peut considérer [avec C. Segre, *Math. Ann.* 40, 413—467, N. 28 (1892)] le nombre bicomplexe

$$\xi = x + jy = x_1 + iu_1 + j(y_1 + iv_1). \quad (2)$$

La totalité des nombres bicomplexes peut être représentée avec les points d'un espace euclidien  $S(x_1, u_1, y_1, v_1)$  à 4 dimensions, et définit une algèbre commutative qui pour ainsi dire, prolonge l'algèbre ordinaire des nombres complexes. Ici l'a. étend au champ bicomplexe la notion classique de fonction holomorphe, de la façon suivante. Soient  $p_1, p_2, p_3, p_4$  quatre fonctions réelles des variables réelles  $x_1, u_1, y_1, v_1$ , définies dans une région  $R$  de l'espace  $S$ , et supposons que

$$f(x, y) = p_1 + ip_2, \quad g(x, y) = p_3 + ip_4 \quad (3)$$

soient dans  $R$  des fonctions holomorphes des deux variables complexes (1); si, en plus, dans  $R$  il résulte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x},$$

l'a. dit que

$$F(\xi) = f(x, y) + jg(x, y) = p_1 + ip_2 + j(p_3 + ip_4) \quad (4)$$

est — dans  $R$  — une fonction bicomplexe holomorphe de la variable bicomplexe (2). Les précédentes hypothèses sont équivalentes à la dérivabilité de la fonction bicomplexe (4) par rapport à la variable (2), la dérivée  $\frac{\partial F}{\partial \xi}$  étant définie opportunément. On a que les six conditions que

$$\begin{aligned} p_1 + ip_2 + j(p_3 + ip_4), & \quad p_2 + ip_1 + j(p_4 + ip_3), & \quad p_3 + ip_4 + j(p_1 + ip_2), \\ p_1 + ip_3 + j(p_2 + ip_4), & \quad p_2 + ip_4 + j(p_1 + ip_3), & \quad p_4 + ip_3 + j(p_2 + ip_1), \end{aligned}$$

soient ordonnément des fonctions bicomplexes holomorphes des variables

$$\begin{aligned} x_1 + iu_1 + j(y_1 + iv_1), & \quad u_1 + ix_1 + j(v_1 + iy_1), & \quad y_1 + iv_1 + j(x_1 + iu_1), \\ x_1 + iy_1 + j(u_1 + iv_1), & \quad u_1 + iv_1 + j(x_1 + iy_1), & \quad v_1 + iy_1 + j(u_1 + ix_1), \end{aligned}$$

sont telles qu'une quelconque d'entre elles entraîne les cinq restantes. — Afin que la fonction bicomplexe (4) soit holomorphe, il est nécessaire et suffisant que les fonctions  $p_1, p_2, p_3, p_4$  soient continues et satisfassent à certaines équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre. Chacune de ces quatre fonctions doit, de son côté, satisfaire au système:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u_1^2} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v_1^2} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial u_1 \partial v_1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial v_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial u_1} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial v_1} &= 0; \end{aligned}$$

reciproquement, à chaque solution p. ex.  $w = p_1$  de celui-ci (définie dans une région  $R$ , et ayant des dérivées continues du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> ordre), on peut en associer trois autres:  $p_2, p_3, p_4$  (définies dans  $R$ , à des constantes additives près), de façon que la fonction bicomplexe (4) correspondante soit holomorphe (dans  $R$ ). D'autres nombreuses propositions, transportant au champ bicomplexe des résultats connus relatifs au champ complexe, sont ensuite données par l'a. (fonctions holomorphes de plusieurs variables, fonctions composées, fonctions implicites). — La plus grande partie du Mémoire est dédiée à la résolution des suivantes questions. Une fonction bicomplexe holomorphe (4) induit, entre la région  $R$  de l'espace  $S(x_1, u_1, y_1, v_1)$  où elle est définie et une certaine région de l'espace  $\Sigma(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , une correspondance qui est pseudoconforme, si l'on regarde  $S$  et  $\Sigma$  respectivement comme espaces représentatifs des couples



variables complexes (1) et (3). L'a. donne les conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une correspondance analytique entre deux courbes, ou deux surfaces, ou deux hypersurfaces assignées de  $S, \Sigma$ , soit subordonnée à une correspondance pseudoconforme du type particulier envisagé tout d'abord. La méthode avec laquelle il parvient au but, fait usage d'une façon essentielle des propriétés des fonctions bicomplexes holomorphes, et elle est analogue à celle du passage du réel au complexe qu'on doit à F. Severi [Rend. Semin. mat. Roma, s. 7, 1—58 (1932), p. 53; v. ce Zbl. 4, 407]; mais l'a. indique aussi comment on pourrait obtenir les mêmes résultats, sans sortir du champ complexe ou du champ réel.

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Caccioppoli, R.:** Un teorema generale sulle funzioni di due variabili complesse. *Rend. Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 699—703 (1934).

In einer früheren Arbeit [vgl. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 309 (1933)] hatte der Verf. den Hartogsschen Satz, daß eine in einem Zylinderbereiche  $\mathfrak{B}$  definierte Funktion  $f(w, z)$  in  $\mathfrak{B}$  regulär ist, falls sie dort bei festgehaltener einer der Veränderlichen jeweils eine reguläre Funktion der anderen ist, auf meromorphe Funktionen übertragen, jedoch unter gewissen Voraussetzungen über die gegebene Funktion. In der vorliegenden Arbeit führt Verf. den Beweis ohne jene einschränkenden Voraussetzungen. Es gilt genauer: Ist die Funktion  $f(w, z)$  in einem Zylinderbereiche  $\mathfrak{B}$  definiert und dort bei festgehaltenem  $w$  (bzw.  $z$ ) jeweils eine meromorphe Funktion von  $z$  (bzw.  $w$ ) mit Ausnahme höchstens einer endlichen Anzahl von  $w$ - oder  $z$ -Werten, so ist  $f(w, z)$  in  $\mathfrak{B}$  eine meromorphe Funktion beider unabhängigen Veränderlichen. *Thullen.*

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Jeffreys, Harold:** Probability and scientific method. *Proc. Roy. Soc. London A* 136, 9—16 (1934).

Allgemeine Bemerkungen, zum Teil polemischen Inhalts (vor allem gegen Fisher), über die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung: insbesondere soll die Notwendigkeit eines apriorischen Elements dargetan werden. *Willy Feller.*

**Romanovsky, V.:** Su due problemi di distribuzione casuale. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 196—218 (1934).

Verf. gibt eine eingehend diskutierte Lösung zweier Wahrscheinlichkeitsprobleme kombinatorischen Charakter an, welche sich auf die zufällige Verteilung einer gewissen Anzahl von Gegenständen auf vorgegebene Fächer beziehen. *de Finetti.*

**Mazzoni, P.:** Su un'origine geometrica di tipi di distribuzioni di frequenze. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5, 219—223 (1934).

**O'Toole, A. L.:** On a best value of  $R$  in samples of  $R$  from a finite population of  $N$ . *Ann. math. Statist.* 5, 146—152 (1934).

The paper first extends the previous results of the author on moment coefficients of samples of  $r$  items drawn from a finite population of  $N$  items, with special reference to their dependence on  $r$ . Since the value of  $r$  is in many cases at the discretion of the investigator, it seems important to know whether one value is better than other values. Under the criterion that the variance is to be a minimum, the conclusion is that, when possible, the investigator arrange to have twice as many in the control group or parent population as in each of the samples to be analyzed. Furthermore taking  $r = N/2$  will insure that the skewness of the samples is independent of the skewness of the parent population, and also that the fifth moment of the sample is independent of the fifth moment of the sampled population. *H. L. Rietz* (Iowa).

**Wicksell, S. D.:** Analytical theory of regression. *Lunds Univ. Årsskr.*, N. F. 30, 1, 1—32 (1934).

Vgl. dies. Zbl. 9, 266.

**Andersson, Walter:** On a new method of computing non-linear regression curves. *Ann. math. Statist.* 5, 81—106 (1934).

Consider a discontinuous distribution with  $f(x)$  for its  $x$ -marginal and  $g(x)$  for its regression of  $y$  on  $x$ . The author expands  $g(x)$  in a Tchebycheff series  $\sum \alpha_i \psi_i(x)$  where  $\psi_i(x)$  is a polynomial of order  $i$ , these satisfying the orthogonality condition  $\int_x f(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx = 0$ , ( $i \neq j$ ) and the minimizing condition  $\sum_x f(x) \cdot [g(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(x)]^2 = \text{Min}$ . The significance and utility of these "Successive regression coefficients" is shown. They bear a relation to Thiele's semi-invariants. A detailed solution is given for two usual forms of a satisfactory approximate marginal distribution, namely A, the normal error function and B, the Pearson Type III function. A critique of various methods of computing regression parabolas is presented and supported by extensive numerical illustrations. A supplementary note with appreciative comments is appended by S. D. Wicksell. Bennett (Providence).

**Hendricks, Walter A.:** The standard error of any analytic function of a set of parameters evaluated by the method of least squares. *Ann. math. Statist.* 5, 107—117 (1934).

Using ideas developed by H. Schulz, *J. Amer. Statist. Assoc.* (25) 139—183 (1930), the author solves the following problem. Let  $y$  be a given analytic function of  $k$  parameters. Assume these evaluated by the method of least squares to fit  $y$  to given data. To find the standard error of  $z$  a second given function of these parameters. Sums of cross products appear which would vanish if the parameters were independent. Application is made to an example of W. J. Spillman, *U. S. D. A. tech. Bull.* 348 (1933). Bennett (Providence).

**Zwiggli, E.:** Sulle riserve matematiche nelle assicurazioni sociali. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5, 256—268 (1934).

Nach Einführung der Funktion  $B(t)$ , der Anzahl der Versicherten zur Zeit  $t$ , des Koeffizienten  $\varphi(\tau)$  der Neubetritte zur Zeit  $\tau$ , der Wahrscheinlichkeit  $p_z(t)$ , daß ein Versicherter, der zum Zeitpunkt  $z$  beitrat, noch  $t$  Jahre nachher der Kasse angehört, wird die Integralgleichung für  $B(t)$  aufgestellt.  $n$  Ursachen des Ausscheidens mit den Koeffizienten  $\mu_{z+t}^{(i)}$  und den fällig werdenden Beträgen  $U_{z+t}^{(i)}$  werden angenommen. Die mittlere Reserve  $V(t)$  wird als das Mittel der totalen Reserve für die ganze Gruppe der Versicherten definiert. Mittels der individuellen Reserve  $V_z^{(i)}$  wird sodann der Ausdruck für  $V(t)$  ermittelt. Zwiggli wendet sich nunmehr der Aufstellung der linearen Differentialgleichung für  $V_z^{(i)}$  zu und gelangt von ihr zur Differentialgleichung von  $V(t)$ . Die komplizierte Form dieser Differentialgleichung legt die Einführung neuer Begriffe nahe, die sich in den weiteren Ausführungen nicht nur formal, sondern auch sachlich als wertvoll erweisen. Als nächste Aufgabe drängt sich die Ermittlung der Integralgleichung für  $V(t)$  auf. Die Lösung dieser Integralgleichung wird durch die Berechnung des lösenden Kernes erzielt. In den Ausführungen am Schlusse der Arbeit wird noch auf einige beachtliche Zusammenhänge zwischen den Barwerten der Leistungen und der Prämien in Sozial- und Privatversicherung hingewiesen. F. Knoll (Wien).

**Loewy, A.:** Sulle „tavole congiunte generali“. *Nuovi contributi all'applicazione degli integrali di Stieltjes alla matematica attuariale.* *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5, 269 bis 291 (1934).

Verf. behandelt die allgemeinste Form einer Ausscheidetafel. Von einer Anfangsgruppe von  $l_{[y]}$  Personen sind nach  $t$  Jahren noch  $l_{[y]+t}$  Personen vorhanden, die in  $n$  Gruppen aufgelöst sind,

$$l_{[y]+t} = l_{[y]+t}^{(1)} + l_{[y]+t}^{(2)} + \dots + l_{[y]+t}^{(n)}.$$

Jedes Individuum kann dabei von einer zur anderen Gruppe übertreten oder auch vollständig ausscheiden, aber es darf immer nur einer Gruppe angehören.  $f_{[y]+t}^{(j)k}$  sei die Anzahl der Individuen, die in den  $t$  Jahren von der Gruppe  $k$  zur Gruppe  $j$  übergetreten



Um die Differenzierbarkeit der Funktionen  $f_{[y]+t}^{(j,k)}$ ,  $l_{[y]+t}^{(j)}$  nicht voraussetzen zu müssen, führt er den Begriff der „Integralintensität“  $M_{[y]+t}^{(j,k)} = \int_0^t d f_{[y]+t}^{(j,k)} / l_{[y]+t}^{(k)}$  ein.  $l_{[y]+t}^{(k)}$  läßt sich bei Voraussetzung der Differenzierbarkeit auf die gewöhnliche Intensität  $\mu_{[y]+t}^{(j,k)}$  zurückführen. Für die Überlebensordnungen  $l_{[y]+t}^{(j)}$  erhält er dann ein System von linearen Integralgleichungen, in denen Stieltjessche Integrale auftreten. Den Spezialfall ( $n = 1$ ) hat der Verf. schon in früheren Arbeiten behandelt (dies. Zbl. 1, 345; 4, 301). — Auf Grund der oben konstruierten Tafel betrachtet dann eine Versicherungsform, die alle möglichen Versicherungskombinationen als Spezialfälle enthält. Er leitet die Formel für die Reserve und die Prämie ab, wobei wieder die Stieltjesschen Integrale verwendet werden. Die allgemein abgeleiteten Ergebnisse spezialisiert er noch für die Invaliden- und Krankenversicherung.

Löer (Göttingen).

**Loewy, Alfred: Die Integration eines linearen Differentialsystems und ihre finanztechnische Bedeutung.** Giorn. Mat. Finanz., II. s. 4, 57—66 (1934).

Die Integration eines linearen homogenen und unhomogenen Differentialsystems läßt sich mit Hilfe des Matrizenkalküls durch unendliche Reihen mit Koeffizienten, durch iterierte Quadraturen bestimmt werden, ausführen. Diese Darstellung ist theoretisch folgendermaßen deutbar: In  $n$  Kassen befinden sich ursprünglich den Anfangswerten der Integrale entsprechende Summen; diese werden auf Zinseszins an den Schuldner so ausgeliehen, daß er den Betrag, den er jeweils der  $k$ -ten Kasse bildet, kontinuierlich mit den Intensitäten, die durch die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems gegeben sind, gleichzeitig an die  $n$  Kassen, nicht nur an derselben, zu verzinsen hat. Auch durch diese ausschließlich finanztechnische Betrachtungsweise gelangt man zu einer vollständigen Integration des Differentialsystems. Autoreferat.

## Geometrie.

**Dingler, Hugo: H. Helmholtz und die Grundlagen der Geometrie.** Z. Physik 90, —354 (1934).

Verf. vergleicht die von Helmholtz mit Hilfe des Begriffes der freien Beweglichkeit eines starren Körpers durchgeführte Begründung der Geometrie mit dem eigenen Vorgehen in seinem Buche „die Grundlagen der Geometrie“, Stuttgart 1933. Verf. hebt dort im Gegensatz zu Helmholtz nur die euklidische Geometrie, weil er neben den Voraussetzungen von Helmholtz noch eine weitere Eigenschaft der Translationen forderte, die den bekannten Zusammenhang zwischen Parallelismus und Streckenkongruenz herstellt. Diese Eigenschaft wird hier mit dem Begriff der „isotrischen Translation“ in nicht ganz zwingender Weise umschrieben.

K. Reidemeister (Marburg a. L.).

● **Steinitz, Ernst: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einfluß der Elemente der Topologie.** Aus dem Nachlaß hrsg. u. erg. v. Hans Rademacher. (Die Grundlagen d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgebiete. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 41.) Berlin: Julius Springer 1934. VIII, 351 S. u. 190 Abb. RM. 27.— Die Grundlage dieses Buches bildet ein unvollendetes Manuskript von Steinitz, das den großen Teil eigene Untersuchungen enthält, die — abgesehen von einer Skizze im Enzyklopädieartikel „Polyeder und Raumeinteilungen“ — hier zum erstenmal publiziert werden. Herausgeber sind die z. T. erheblichen Lücken namentlich im letzten Teil ausgefüllt worden, wozu als Anhaltspunkte neben dem erwähnten Artikel Vorlesungsnotizen von Steinitz dient haben. Der Herausgeber hat ferner einige kleine erläuternde oder ergänzende Zusätze in den Steinitz'schen Text eingefügt und die zahlreichen Figuren entworfen. Im ganzen ist ein Buch entstanden, das sich durch ungewöhnlich klare und sorgfältige Darstellung und zuletzt durch seinen weit über das Bekannte hinausreichenden Inhalt auszeichnet. —

Der 1. Abschnitt „Historische Übersicht über die Entwicklung der Lehre von den Polyedern“ beginnt mit einer Darstellung der Eulerschen, auf eine Morphologie der Polyeder abzielenden Untersuchungen. Für den Eulerschen Satz werden mehrere Beweise wiedergegeben. Es wird gezeigt, wie sich an Hand der Frage nach seinem Gültigkeitsbereiche die Flächentopologie entwickelt, und diese — zunächst unter weitgehender Berufung auf die Anschauung — gestellt. Es folgt Cauchys Satz über die Starrheit der konvexen Polyeder. Der metrische Teil des Beweises mit Ausfüllung einer bei Cauchy bestehenden Lücke wird an dieser Stelle weggelassen, während der kombinatorisch-topologische seinen natürlichen Platz im 2. Abschnitt gefunden hat. Nach einer kritischen Darstellung von Legendreschen Untersuchungen über die Konstantenzahl eines Polyeders wird nun der Hauptgegenstand des Buches, das hier von Steinitz erstmalig gelöste Problem der kombinatorischen Kennzeichnung der konvexen Polyedertypen, herauspräpariert. Hierbei wird auch kurz auf die älteren, insbesondere Cayley, Kirkman, Möbius, Eberhard herrührenden Untersuchungen eingegangen. Der 2. Abschnitt führt für Dreiecks- und Dreikantspolyeder (jedoch nicht für den allgemeinen Fall) zu abschließenden Ergebnissen geführt haben. — Gegenstand der Untersuchungen des 2. Abschnitts sind kombinatorische Schemata, die aus Elementen von dreierlei Art: Ecken, Kanten und Flächen bestehen. Ist in einem solchen System für je zwei verschiedenartige Elemente festgesetzt, ob sie „inzident“ sind oder nicht, derart, daß eine Fläche und eine Ecke stets inzident sind, wenn es eine mit beiden inzidente Kante gibt, so heißt es ein geordneter Komplex. Hiermit ist klar, wann zwei geordnete Komplexe als isomorph oder vom gleichen Typus zu bezeichnen sind. Solche werden im folgenden nicht unterschieden. Ein geordneter Komplex ist zusammenhängend, wenn sich je zwei Elemente durch eine Kette von Elementen verbinden lassen, derart, daß je zwei benachbarte inzident sind. — Bei Untersuchungen der geordneten Komplexe spielen die als Kantenkomplexe bezeichneten Teilkomplexe ohne Flächen eine wesentliche Rolle. Über sie werden einige Sätze allgemeiner Art bewiesen, und es wird der Begriff des Polygons als endlicher zusammenhängender Kantenkomplex, bei dem jede Ecke mit genau zwei Kanten inzident ist, eingeführt. — Die zusammenhängenden geordneten Komplexe sind noch viel zu allgemein. Die zunächst vorzunehmenden Einschränkungen bezwecken im wesentlichen zu garantieren, daß 1. die Teilkomplexe, die durch Fortlassen der Elemente einer Kante entstehen, noch zusammenhängend sind, und daß 2. die mit einer Fläche inzidenten Ecken und Kanten ein Polygon im obigen Sinne bilden. 1. ergibt sich aus der Forderung des „vollkommenen Zusammenhangs“: Der geordnete Komplex soll von jeder Art wenigstens ein Element enthalten, und er selbst sowie jedes System der mit einer Ecke oder Fläche inzidenten Elemente soll zusammenhängend sein. 2. ist bei den „polyedrischen Komplexen“ erfüllt, das sind geordnete Komplexe, bei denen jede Kante mit zwei Ecken und mit einer oder zwei Flächen inzident ist, bei denen ferner zu jedem inzidenten Paar (Ecke, Fläche), ein Winkel genannt, genau zwei Kanten, die Schenkel, existieren, die mit beiden Elementen des Paares inzident sind. Die endlichen, vollkommen zusammenhängenden, polyedrischen Komplexe, kurz normalen Komplexe, können nun als kombinatorischer Ersatz der topologischen Flächen dienen. Sie zerfallen in orientierbare und nichtorientierbare. Es ist ihnen sinnvoll zwischen inneren und Randelementen zu unterscheiden. Der gesamte Komplex besteht aus endlich vielen Polygonen. Wenn  $r$  deren Anzahl ist, ist die Eulersche Charakteristik  $\leq 2 - r$ . Die normalen Komplexe der Charakteristik 2 sind geschlossen und orientierbar, sie heißen Eulersche Komplexe. Zum Aufbau der Flächentopologie ist nun noch ein Homöomorphie ersetzender Äquivalenzbegriff einzuführen, was folgendermaßen geschieht. Zwei normale Komplexe heißen benachbart, wenn einer von ihnen aus dem anderen durch eine „Spaltung“ hervorgeht. Eine Spaltung besteht entweder in der Zufügung einer Ecke auf einer Kante, wodurch die Kante in zwei zerlegt wird, oder einer Kante, die zwei mit einer Fläche inzidente Ecken verbindet, wodurch die Fläche zerlegt wird. Es ist klar, wie diese Bedingungen rein kombinatorisch zu formulieren sind. Zwei normale Komplexe heißen nun äquivalent, wenn sie durch eine Kette von normalen Komplexen derart verbunden werden können, daß je zwei aufeinanderfolgende Komplexe benachbart sind. Im Sinne dieser Begriffsbildung wird dann die Topologie der Flächen entwickelt und insbesondere der Hauptsatz bewiesen: Zwei normale Komplexe sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie in Ränderzahl, Charakteristik und in Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit übereinstimmen. — Die bisher betrachteten Schemata lassen im allgemeinen noch keine Realisierung als ebenflächige Gebilde im Raume zu, z. B. weil bei ihnen noch Zweiecke auftreten können. Dies wird durch die Forderung ausgeschlossen, daß jeder Winkel (vgl. oben) durch seine Schenkel eindeutig bestimmt sein soll. Aber auch diese nun als Polyeder bezeichneten Komplexe lassen sich noch nicht als konvexe Polyeder realisieren. Hierzu werden zwei weitere Einschränkungen gemacht, die die Notwendigkeit auf der Hand liegt: 1. Das Polyeder soll keine „übergreifenden Elemente“ besitzen, d. h.: Sind zwei Ecken mit zwei Flächen inzident, so soll es eine Kante geben, die mit allen vier Elementen inzident ist. 2. Das Polyeder soll ein Eulersches, seine Charakteristik also 2 sein. Diesen Bedingungen genügende Polyeder werden  $K$ -Polyeder genannt; sie stellen, wie im 3. Abschnitt gezeigt wird, genau die als konvexe Polyeder realisierbaren Typen dar. Zur Vorbereitung der Beweise dafür werden noch einige kombinatorische Reduktionen



besser Aufbauprozesse besprochen. Es handelt sich in der Hauptsache um die „regulären Itungsprozesse“, die aus den oben erwähnten Spaltungen in gewisser Weise zusammen-  
 tetzt sind. Sie führen ein  $K$ -Polyeder stets wieder in ein  $K$ -Polyeder über, was bei den obigen  
 chen Prozessen offenbar nicht immer der Fall ist. Das Hauptresultat über die regulären  
 tungen lautet: Jedes  $K$ -Polyeder läßt sich durch reguläre Spaltungen aus dem Tetraeder  
 ugen. In diesem Zusammenhang wird u. a. auch ein ähnlicher Aufbausatz von Kirkman  
 enen, bei dem man allerdings von sämtlichen Pyramiden ausgehen muß. — Der 3. Ab-  
 nitt bringt drei Beweise des „Fundamentalsatzes der konvexen Typen“, daß jedes  $K$ -  
 eder als konvexes Polyeder realisiert werden kann. Der erste Beweis beruht wesentlich  
 dem genannten Hauptsatz über die regulären Spaltungen. Demnach genügt es, folgendes zu  
 en: Geht das  $K$ -Polyeder  $C_1$  aus dem  $K$ -Polyeder  $C_0$  durch eine reguläre Spaltung hervor  
 ist  $C_0$  als konvexes Polyeder realisiert, so läßt sich auch  $C_1$  konvex realisieren. Die regu-  
 Spaltung läßt sich an  $C_0$  unmittelbar geometrisch durchführen. Nur bleiben dabei die bei-  
 aus einer Fläche durch die Spaltung entstehenden Teilflächen in derselben Ebene. Es  
 delt sich also nur darum, dies durch passende kleine Abänderungen der Elemente zu be-  
 gen. Bei Dreikantspolyedern ist eine solche Variation leicht zu bewerkstelligen, bei be-  
 gen  $K$ -Polyedern stehen dem jedoch Schwierigkeiten entgegen, die durch Untersuchungen  
 Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von (analytisch formulierten) Inzidenzbedingungen,  
 Untersuchungen von Funktionaldeterminanten, überwunden werden. — Die beiden an-  
 nen Beweise verwenden keinerlei analytische Hilfsmittel; sie beruhen ausschließlich auf den  
 knüpfungs- und Anordnungsaxiomen im Hilbertschen Sinne, und zwar der zweite für  
 euklidischen, der dritte für den projektiven Raum. Alle verwendeten Sätze, u. a. der  
 lanske Satz für Polygone und Eulersche Polyeder, werden aus diesen Axiomen vollstän-  
 hergeleitet. Der zweite Beweis beruht ebenfalls auf dem obigen Satz über reguläre Spal-  
 ten und verläuft dem ersten im wesentlichen parallel. Es werden (ohne Stetigkeitsaxiome!)  
 eigneter Weise „Umgebungen“ von Punkten, Geraden und Ebenen und damit Variationen  
 s Polyeders definiert, die an die Stelle der analytischen Variationen des ersten Beweises  
 en. Anders verläuft der im projektiven Raum operierende dritte Beweis. Hier treten  
 chst an Stelle der konvexen die projektiv-konvexen Polyeder, das sind, kurz gesagt, solche,  
 durch passende Kollineationen in konvexe Polyeder übergehen. Ferner liegen dem Beweis  
 re Abbauprozesse zugrunde, nämlich folgende: 1. Abschneiden einer dreikantigen Ecke  
 (Prozeß). 2. Fortlassen einer dreieckigen Fläche und passende Erweiterung der an sie an-  
 enden Flächen, so daß im ganzen ein Tetraeder aufgesetzt wird ( $\eta$ -Prozeß). (Im eukli-  
 den Raum ist dies nicht immer ausführbar, wohl aber im projektiven.) Einer dieser Pro-  
 kann stets angewendet werden, da dreikantige Ecken oder Dreiecke stets vorhanden  
 wie man leicht aus Eulerschen Relationen entnimmt. Es wird gezeigt, daß durch wieder-  
 Anwendung von  $\omega$ - und  $\eta$ -Prozessen jedes  $K$ -Polyeder auf ein Tetraeder reduziert werden  
 . (Die Hauptschwierigkeit, die durch einen eleganten Kunstgriff überwunden wird, ist  
 bei, daß ein solcher  $\omega$ - oder  $\eta$ -Prozeß nicht immer eine Verkleinerung der Kantenzahl  
 icht bringt.) Indem man diesen Abbau in umgekehrter Reihenfolge durchläßt, kann man  
 Tetraeder ausgehend durch einfache lineare Konstruktionen jeden  $K$ -Polyedertypus als  
 ektiv-konvexes Polyeder realisieren. — Ein Hauptvorteil dieses Beweises ist, daß er —  
 r Heranziehung von Stetigkeitsaxiomen oder des Fundamentalsatzes der projektiven  
 etrie — zur Herleitung einer Parameterdarstellung aller projektiv-konvexen Polyeder  
 beliebigen Typus und damit zum Beweis des folgenden „Kontinuitätssatzes der konvexen  
 en“ ausgebaut werden kann: Zwei projektiv-konvexe Polyeder von gleichem Typus lassen  
 unter Aufrechterhaltung ihrer projektiven Konvexität und ihres Typus stetig ineinander  
 führen. Schließlich wird gezeigt, daß sich bei zwei euklidisch-konvexen Polyedern diese  
 führung auch unter Erhaltung der euklidischen Konvexität durchführen läßt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Kashikar, P. K.: The Archimedian solids. Math. Student 2, 60—65 (1934).

Satyanarayana, K.: Some results connected with triangles in perspective. Math.  
 Student 2, 49—59 (1934).

Thébault, V.: Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec  
 cercles tangents aux trois côtés. (57. sess., Chambéry, 24. VII.—4. VIII. 1933.)  
 oc. Franç. Avancement Sci. 54—57 (1933).

● Juel, C.: Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung  
 v. Staudtscher Imaginärtheorie. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell.  
 besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam  
 W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 42.) Berlin: Julius Springer  
 . XI, 287 S. u. 87 Fig. RM. 21.—.

Das in der Hauptsache vom Standpunkte der synthetischen Geometrie aus geschriebene  
 daher mit einer Menge Figuren geschmückte Buch rekapituliert in seiner Einleitung die

Elemente der reellen synthetischen Geometrie, meist ohne auf Beweise einzugehen und durch Verweisungen auf das bekannte Buch von Enriques ersetzend. Im Vordergrund des Interesses stehen Sätze über die Regelfläche 2. Ordnung und die lineare Linienkongruenz bei der folgenden Einführung der imaginären Elemente benötigt werden. Diese Einführung geschieht in der Ebene und im Raume nach der Methode von v. Staudt, also unter Verwendung von orientierten elliptischen Involuntionen. In dem komplexerweiterten Kontinuum wird nun der Begriff der Kette erklärt, und es werden die Sätze über Lagebeziehungen und Ketten eines binären Gebietes auf der imaginären Geraden 2. Art bewiesen. Es folgt die Untersuchung der binären Projektivitäten und Antiprojektivitäten, die besonders hinsichtlich ihrer Doppelpunkte ausführlich behandelt werden. Gründliche Aufmerksamkeit verlangen natürlich die involutorischen Transformationen dieser Art. In die analytische Behandlung desselben Gegenstandes wird durch die Wurfrechnung eingeführt. Der Wurf, bisher nur ein Symmetrisches für ein geordnetes Punktquadrupel wird mit einem Elemente  $w$  einer Menge identifiziert, der Rechenregeln definiert werden, die erstens projektiv invariant sein und zweitens den Körperaxiomen genügen sollen. Nachdem auf diesem Wege Koordinaten eingeführt sind, werden mit ihrer Hilfe die Projektivitäten und Antiprojektivitäten analytisch behandelt, wobei gelegentlich der invariantentheoretische Standpunkt eingenommen wird. Eine besonders ausführliche Behandlung erfahren die Doppelketten, d. h. die sich selbst entsprechenden Ketten der Transformationen. Es folgt die Einführung homogener Koordinaten in der Ebene mit Hilfe von Doppelverhältnissen. — Bevor dann, in Fortsetzung des bisherigen Gedankenganges, die komplexe Geometrie der Ebene begründet wird, ist ein Kapitel über Aufgaben 3. und 4. Grades eingeschoben. Es handelt sich dabei um Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten und die geometrische Lösung der Gleichung 3. Grades, die mit dem aus der Algebra bekannten Verfahren in Parallele gesetzt wird. — Der zweite Abschnitt bringt die projektive Geometrie im zweidimensionalen komplexen Gebiet und führt in die Elemente der komplexen Geometrie der Ebene ein, die der Verf. seinerzeit zusammen mit C. Segre begründet hat. Er beginnt mit einer synthetischen Einführung der Begriffe Kollineation und Antikollineation. Es folgt ein Kapitel über die zweidimensionale Kette. Dann bringt die algebraische Behandlung eine Klassifikation der Projektivitäten und Antiprojektivitäten und die Theorie des Hyperkegelschnittes. Die Doppelketten der Transformationen werden synthetisch und analytisch bestimmt. — Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Einführung der Metrik. Aus drei Forderungen, welche an die „Bewegungen“ einer metrischen Geometrie gestellt werden, leiten sich die drei Möglichkeiten: hyperbolische, elliptische und euklidische Geometrie ab. Nacheinander werden in den einzelnen Geometrien die Maßzahlen für Länge und Winkel eingeführt. In der hyperbolischen Geometrie werden die einfachsten elementargeometrischen Sätze und trigonometrischen Beziehungen bewiesen. Dann wird kurz der Unterschied zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie herausgearbeitet. Ein großer Teil des anschließenden Kapitels über die euklidische Geometrie ist der Theorie der Kreisverwandtschaften gewidmet, die selbstständig und ohne Bezug auf das früher über die Geometrie der Ketten Gesagte entwickelt wird. Der vierte Abschnitt führt in die synthetische Theorie der quadratischen Transformationen und Kurven 3. Ordnung ein. Ausgangspunkt ist die Untersuchung der Büschel von Kollineationen, Korrelationen und Kegelschnitte. Eine quadratische Transformation entsteht durch Schnitt zweier Korrelationen. Involutorische quadratische Transformationen. Dann wird zuerst die rationale und darauf die elliptische Kurve 3. Ordnung als Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines projektiven Geradenbüschels gewonnen. Beide werden hinsichtlich ihrer Wendepunktfigur und der Polarentheorie untersucht. Satz von Salmon über die Theorie der konjugierten Punkte, Steinersche Polygone. Schließlich erscheint die Kurve 3. Ordnung als Jacobische Kurve eines Kegelschnittbüschels. Kurve 3. Ordnung und quadratische Transformationen. Einige Bemerkungen über abhängige Punktepaare. — In der Literaturübersicht auf S. VII fehlen die einschlägigen Arbeiten von E. Study [vgl. Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 43, 215 (1934)] und die Lehrbücher von Coolidge und Cartan (vgl. dies. Zbl. 3, 68). Weiss.

**Rao, C. V. H.:** The  $\Phi$ -conic from a projective standpoint. J. Indian Math. Soc. 20, 176—177 (1934).

Der Ort aller Geraden, die zwei Kegelschnitte in harmonischen Punktepaaren schneiden, ist bekanntlich eine Kurve 2. Klasse. Ein synthetischer Beweis für diesen Satz scheint zu fehlen. Der Verf. bringt einen Beweis dieser Art, wobei er allerdings als bewiesen voraussetzt, daß der Ort aller Geraden, die drei Kegelschnitte in Punktepaaren einer Involution schneiden, eine Kurve 3. Klasse ist. E. A. Weiss (Bonn).

**Rao, S. Krishnamurthy:** Collineations in  $n$ -space. J. Indian Math. Soc. 20, 193—203 (1934).

Durch eine Kollineation im  $R_n$  werden Kollineationen in den Bildräumen der im  $R_n$  enthaltenen Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}^2$ , Geraden und allgemeiner, beliebigen Unterräumen  $R_r$  induziert. Der Verf. behandelt die Frage, wie die Charakteristik der indu-



en Kollineationen von der Charakteristik der vorgegebenen Kollineation abhängt. gelingt ihm, die Frage für den Fall der quadratischen Mannigfaltigkeiten und der Geraden zu beantworten. Im Falle allgemeiner Unterräume gibt er nur zwei vorstehende Sätze.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Barbilian, D.: Zur Bewegungstheorie der Septuoren.** Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 29—74 (1934).

Die Untersuchung beschäftigt sich mit der diskontinuierlichen Erzeugung einer Korrelation des  $R_3$  mit Hilfe der Drehungsachsen eines von Tzitzéica gegebenen kinematischen Verfahrens. Projektive Systeme von sieben Geraden der Septuoren genannt — vermitteln die Verknüpfung. Die Arbeit von Blaschke die Geometrie der Speere [Mh. Math. Phys. 21 (1910)] bildet für den Leser eine umfassende Grundlage für das Verständnis der Abhandlung, obwohl Zielsetzung Ergebnisse in anderer Richtung liegen.

*Haenzel (Karlsruhe).*

**Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Oriented circles.** J. Indian Math. Soc. 20, 204—211 (1934).

Ausgehend von einer Parameterdarstellung der Punkte eines orientierten Kreises geht der Verf. eine analytische Darstellung der Laguerreschen Inversion ab, mit Hilfe der eine einfache Ableitung der bekannten Eigenschaften dieser Transformation gibt. Es folgen Anwendungen: Drei orientierte Kreise werden in drei orientierte Kreise von gleichem Radius nur durch eine Inversion an einer Parallelen zur Verbindungsgeraden ihrer eigentlichen Ähnlichkeitspunkte transformiert. Anwendung auf die Apollonische Aufgabe. — Ist  $A$  ein Schnittpunkt zweier orientierter Kreise  $C_p$  und  $C_q$ , so ist  $\angle A_{pq}$  der Winkel zwischen den orientierten Tangenten der beiden Kreise im Punkte  $A$  verstanden. Dual wird mit  $l_{pq}$  das gemeinsame Tangentialsegment der beiden Kreise bezeichnet. Die folgenden Sätze geben Beziehungen zwischen den Winkeln  $\angle A_{pq}$  zweier Kreise einerseits und den Tangentialsegmenten mehrerer Kreise andererseits. Diese gehören paarweise als duale Sätze zusammen. Unter ihnen findet sich auch der Satz von Miquel.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Graf, Ulrich: Über Laguerresche Geometrie in Ebenen mit nichteuklidischer Maßbestimmung und den Zusammenhang mit Raumstrukturen der Relativitätstheorie.** Z. Math. J. 39, 279—291 (1934).

Die ebene Laguerregeometrie behandelt die Transformationsgruppe der gerichteten Geraden — Speeren — der Ebene, die — gerichtete — Kreise überträgt und die „Tangentialdistanz“ zweier Kurven mit gemeinsamer Tangente invariant lassen. Diese Gruppe ist vermöge der zyklographischen Abbildung isomorph zur Gruppe der Lorentzschen Bogenelemente einer zweidimensionalen Welt. — Analog kann man nun eine nichteuklidische Laguerregeometrie definieren, indem man in der Definition von Kreis und Tangentialdistanz ausgeht von einer nichteuklidischen Maßbestimmung der Ebene. Die zyklographische Abbildung läßt sich auf diesen Fall übertragen und man kommt statt zu einer räumlichen Geometrie mit dem absoluten Kegelschnitt — eben der Lorentzgeometrie —, zu einer pseudo-euklidischen oder pseudo-hyperbolischen Raumgeometrie, wobei der Zusatz pseudo bedeutet, daß die Winkelmessung hyperbolisch ist. Hat das in der Ebene zugrunde liegende absolute Gebilde die Gleichung  $x^2 + y^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$ , wo  $\varepsilon^2 = 0, -1, +1$  die Euklidische, elliptische, hyperbolische Geometrie bedeutet, so führt die zyklographische Abbildung auf das Gebilde  $x^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$ . Die zyklographische Abbildung bildet den Speer ab auf eine der beiden hindurchgehenden Tangentialebenen der Fläche, die Gruppe der automorphen Transformationen der Fläche liefert die entsprechende Geradengruppe. Im Euklidischen Fall ist diese durch Hinzunahme der Ähnlichkeit 7-gliedrig, sonst 6-gliedrig. Die elliptische Laguerregeometrie ist gleichwertig mit der zum de Sitterschen Weltbild gehörigen Geometrie der Ebene.

*G. Bol.*

Hoffmann, Sigmund: Der Eulersche Dreiecksatz in der Cayley-Kleinschen metrie und Verallgemeinerungen desselben. Freiburg i. Br.: Diss. 1933. 22 S.

### Algebraische Geometrie:

Calvi, Margherita: Sistemi lineari di cubiche piane i cui punti base sono di fle. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 72, 71—75 (1934).

L'a. démontre qu'il n'y a d'autres systèmes linéaires de cubiques planes (irréductibles) dont tous les points base sont des points d'inflexion, hors les suivants, et les systèmes linéaires moins amples contenus dans un de ceux-ci ne possédant aucun point base ultérieur: 1. Systèmes linéaires  $\infty^6$  ayant un point base d'inflexion à tangente fixe. 2. Systèmes linéaires  $\infty^5$  ayant un point d'inflexion à tangente variable (ce point admet, par rapport à toutes les cubiques du système linéaire, une droite polaire harmonique fixe). 3. Systèmes linéaires  $\infty^3$  ayant deux points base d'inflexion à tangentes fixes. 4. Réseaux avec trois points base d'inflexion alignés, tous à tangentes variables (le birapport formé par deux quelconques de ces points et par les points où la droite qui les contient coupe les relatives polaires harmoniques, est égal à quatre). 5. Réseaux avec trois points base d'inflexion alignés, dont un à tangente variable et deux à tangentes fixes. 6. Faisceaux syzygétiques. (Il faut naturellement ajouter: 7. Le système linéaire  $\infty^9$  formé par toutes les cubiques du plan.)

Beniamino Segre (Bologna)

Ramamurti, B.: A covariant specification of the simplex inscribed in a rational norm curve in a space of odd dimensions and circumscribed to a quadric in polar to the curve. J. Indian Math. Soc. 20, 189—192 (1934).

Taking a norm curve  $R_{2n-1}$  (rational curve of order  $R_{2n-1}$ ) in  $S_{2n-1}$ , a set of  $4n$  points on it, given parametrically by the binary  $(4n-2)$ -ic  $a_i^{4n-2}$ , determines uniquely a quadric envelope  $Q$ , touching the osculating hyperplanes at these points and inscribed to  $R_{2n-1}$ . There is, in general, a unique simplex  $T$  inscribed in  $R_{2n-1}$  and circumscribed to  $Q$ . The vertices of the simplex are given parametrically by the binary  $2n$ -ic

$$b_i^{2n} = (a_1 a_2)^4 \dots (a_1 a_n)^4 \dots (a_{n-1} a_n)^4 a_{1i}^2 \dots a_{ni}^2,$$

where

$$a_{1i}^{4n-2} = \dots = a_{ni}^{4n-2} = a_i^{4n-2}.$$

van der Waerden (Leipzig)

Martinetti, Vittorio: Problemi grafici sulle quartiche gobbe di 1<sup>a</sup> specie e sulle quadriche, individuate rispettivamente da otto e nove punti generici. Atti Accad. Peloritana Messina 35, 15—17 (1934).

Calapso, R.: Quadrica per nove punti. Atti Accad. Peloritana Messina 35, 19— (1934).

Zwei Konstruktionen einer Quadrik aus 9 Punkten  $P_i$ . — Die erste betrachtet die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art durch 8 gegebene Punkte und sucht ihren übrigen Schnittpunkt mit einer Ebene durch 2 der 8 Punkte; zwei Anwendungen dieser Konstruktion geben die Schnittpunkte der betrachteten Quadrik mit der Ebene  $P_1 P_2$ . — Die zweite benutzt eine Hirstsche Inversion, die die Quadrik in eine Ebene verwandelt. — Beide bedienen sich auch der Methoden der darstellenden Geometrie.

E. G. Togliatti (Genova)

Godeaux, Lucien: Remarques sur une surface de genres un contenant une involucre de genres zéro et de bigenre un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 615—621 (1934).

On sait (Enriques, Un'osservazione relativa alle superficie di bigenre un Rend. R. Acc. Bologna 1907, 40) qu'une surface  $S$  de genres zéro et de bigenre un transformée par l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface  $\Sigma$  de genres un birationnellement équivalente à une quadrique double. L'auteur montre comment  $\Sigma$  peut être transformée en une quadrique double, il établit l'existence de dix-huit faisceaux de courbes elliptiques sur  $\Sigma$  et en déduit qu'il peut exister sur une surface  $S$  des courbes elliptiques isolées se rencontrant en deux points. P. Dubreil (Nancy)



**Babbage, D. W.:** Multiple canonical surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, —308 (1934).

If the canonical system  $|K|$  of an algebraic surface  $F$  is irreducible, of dimension  $m$ , and is composed of an involution of order two, the surface  $F$  is mapped by  $|K|$  on a doubly covered surface  $f$ . It is proved, apparently under the assumption that  $|2K|$  is simple, that the surface  $f$  must have geometric genus  $p_g = 0$ . The proof of this interesting theorem can be considerably simplified, by eliminating the need of the projective considerations used by the author. Examples of doubly covered canonical surfaces are given, in which  $f$  is either a ruled surface or the sextic surface of Enriques. A few remarks are added, concerning triply covered canonical surfaces.

*O. Zariski (Baltimore).*

**Du Val, P.:** On the ambiguity in the specification of a two sheeted surface by its branch curve. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 309—314 (1934).

Given an algebraic surface  $F$  and an algebraic curve  $C$  on  $F$ , it is proved that a necessary and sufficient condition that there exist doubly covered surfaces with  $C$  as a branch curve, is that there shall exist on  $F$  at least one linear system  $|\frac{1}{2}C|$ . If this condition is satisfied, then the number of birationally distinct doubly covered surfaces  $F$ , possessing  $C$  as a branch curve, is  $2^{2q+\delta}$ , where  $q$  is the irregularity of  $F$  and where  $\delta$  is the order of the group of torsion mod 2 of  $F$ . These results are not new. They are special cases ( $m = 2$ ) of more general theorems, concerning  $m$ -fold cyclic surfaces, which have been proved by Comessatti ("Sulle superficie multiple cicliche", *Atti Semin. mat. Univ. Padova* **1930**, Nr 1—2).

*O. Zariski (Baltimore).*

● **Godeaux, Lucien:** Les transformations birationnelles de l'espace. Mém. Sci. math. **67**, 64 S. (1934).

A review of the theory of space Cremona transformations and of the geometry of the space from the point of view of these transformations. The author observes the lack of generality in this theory and points out, when the occasion arises, unsolved problems in which the theory abounds. Proofs are given when dealing with fundamental and introductory topics, while topics in which general results are available and have been obtained by not too cumbersome methods, while otherwise the exposition is of necessity formal. Chapter I deals with linear systems of surfaces. Chapter II is devoted to the classification and properties of the fundamental elements of a space Cremona transformation, including some general results (Castelnuovo) for regular transformations. In Chapter III singularities of surfaces and of curves are treated. A detailed account is given of the use of quadratic transformations in the theory of singularities of surfaces, as developed by C. Segre. Chapter IV deals with properties of geometric configurations in space, which are invariant under Cremona transformations. The topics treated include the adjoint systems of linear systems of surfaces, the reduction of linear systems to a normal type, etc. The entire Chapter V is devoted to the singularities of Enriques and Fano on continuous, finite, algebraic groups of Cremona transformations.

*O. Zariski (Baltimore).*

**Todd, J. A.:** Some group-theoretic considerations in algebraic geometry. Ann. of Math., II. s. **35**, 702—704 (1934).

It is shown that the various types of equivalence, which occur in the theory of algebraic surfaces or varieties (linear and algebraic equivalence of  $V_{r-1}$ 's on a  $V_r$ ; numerical equivalence, in the sense of Severi, of  $V_k$ 's on a  $V_r$ ), admit a common group-theoretic formulation. In each case, the entities (effective or virtual) on  $V_r$ , which are being related upon by addition and subtraction, form an abelian group  $\mathfrak{S}$ , and the various types of equivalence correspond to a particular choice of an invariant subgroup of  $\mathfrak{S}$ , whose elements are considered as being equivalent to zero. *O. Zariski (Baltimore).*

**Segre, Beniamino:** Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche. Mem. Accad. Ital. **5**, 479—576 (1934).

Die Begriffe der Äquivalenzscharen von Punktgruppen und der Äquivalenzscharen von algebraischen Kurven auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit, die in den letzten Jahren von F. Severi eingeführt und die von der italienischen geometrischen Schule schon viel angewendet worden sind, finden hier zahlreiche Anwendungen in

der Geometrie auf einer algebraischen  $V_3$  (mit normalen Singularitäten). Kap. I: zunächst einige Verallgemeinerungen bekannter einfacher Begriffe (wie z. B. die kanonische Linearschar auf einer zerfallenden oder virtuellen Kurve; die Definition Gruppe  $(CS)$  der Schnittpunkte einer Kurve  $C$  und einer Fläche  $S$  im Falle, daß  $C$  virtuell ist oder einen Teil von  $C$  enthält; die Definition der charakteristischen Schnittzahl  $(C^2)_S$  einer Kurve  $C$  auf einer Fläche  $S$  im Falle, daß  $C$  virtuell ist oder  $C$  nicht enthalten ist usw.) und geht dann zur Behandlung verschiedener Fragen über Gruppen von Schnittpunkten von Kurven und Flächen einer  $V_3$ , insbesondere zur Bestimmung der Äquivalenz einer Kurve  $C$  einer  $V_3$ , die auf drei Flächen  $S, T, U$  der  $V_3$ , mit gegebenen Multiplizitäten  $s, t, u$  gleichzeitig liegt; es folgt eine Konstruktion der kanonischen Linearschar auf einer solchen Kurve  $C$ . Kap. II betrachtet verschiedene Äquivalenzscharen von Punktgruppen und Äquivalenzsysteme von Kurven einer  $V_3$ , die mit einem gegebenen Äquivalenzsystem  $|C|$  von Kurven oder mit einem gegebenen Linearsystem  $|S|$  von Flächen der  $V_3$  kovariant verbunden sind. So bilden z. B. die kanonischen Punktgruppen der Kurven von  $|C|$  oder der Flächen von  $|S|$  solche Äquivalenzscharen von Punktgruppen. Besondere Wichtigkeit haben das Jacobische Kurvensystem  $|J|$  und die Jacobische Punktgruppenschar  $|\partial_S|$  von  $|S|$ ; sie werden bzw. von den Jacobischen Kurven oder Punktgruppen aller Netze oder aller Büschel von  $|S|$  definiert; sie führen zu zwei neuen invarianten Bildungen der  $V_3$ , eine Äquivalenzschar  $|\zeta|$  und ein Äquivalenzsystem  $|Y|$ . Anwendungen zur Bestimmung der invarianten Äquivalenzscharen einer Fläche der Form  $c_1 S_1 + c_2 S_2$ , die auf  $V_3$  liegt, und auf die Bestimmung der mehrfachen Punkte, die zwei Flächen der  $V_3$ , die eine Berührungskurve haben, auf dieser Kurve besitzen. Kap. III, IV, V enthalten eine Menge Anwendungen, die die Bestimmung und die Untersuchung der wichtigsten kovarianten Bildungen gegebener Linearsysteme von Flächen einer  $V_3$  betreffen. So die Jacobische Kurve eines Flächennetzes und die Berührungskurve von zwei Flächennetzen; die Jacobische Fläche und 4 kovariante Kurven eines  $\infty^3$  Linearflächensystems; einige kovariante Gebilde eines  $\infty^4$  Linearflächensystems; die Berührungsmannigfaltigkeiten von 2, 3, 4 Flächenbüscheln usw. Alle kovarianten Gebilde, die hier betrachtet werden, lassen sich mit den invarianten und kovarianten Bildungen des II. Kap. ausdrücken; sie werden oft mit verschiedenen Verfahren erhalten; fast immer wird auch die abzählende Übersetzung der geometrisch-funktionellen Gleichungen angegeben. Kap. VI enthält Anwendungen insbesondere auf die  $V_3$  eines Raumes  $S_4$ , die als einzige Singularität die Schnittfläche von zwei  $V_3$  als Doppelfläche enthalten. — Über einzelne Ergebnisse ist es nicht möglich, ausführlicher zu referieren; so z. B. findet Verf., daß die Invarianten  $I, \Omega_0$  einer algebraischen  $V_3$  (mit normalen Singularitäten) immer gerade ganze Zahlen sind. Auch erhält er einige Eigenschaften des arithmetischen Geschlechtes  $P_a$  einer  $V_3$ , die als Definitionen von  $P_a$  dienen könnten; eine von diesen Eigenschaften ist eine Folge der bekannten Formel von F. Severi:  $2P_a = \Omega_2 - \Omega_1 + \Omega_0 + \dots$  und könnte, wenn direkt gefunden, einen neuen Beweis jener Formel liefern; das wird im Kap. VI, für die dort betrachteten  $V_3$ , ausgeführt. E. G. Togliatti (Genova).

### **Differentialgeometrie:**

Hedlund, Gustav A.: On the metrical transitivity of the geodesics on a surface of constant negative curvature. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 136—140 (1934).

Der Verlauf der geodätischen Linien auf geschlossenen zweiseitigen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes ist wiederholt studiert worden. Man betrachtet den mit der Fläche verbundenen Phasenraum  $\Omega$ , Phase = (Punkt, Richtung). Durch jeden Phasenpunkt geht genau eine Integralkurve, entsprechend der geodätischen Linie. Die gleichförmige Bewegung längs der geodätischen Linien kann als stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in  $\Omega$  aufgefaßt werden. Die Inkompressibilität entspricht der Existenz eines invarianten Volumelementes in  $\Omega$ . Eine derartige Strömung kann folgende Eigenschaften haben. 1. Quasiergodizität. Min-



tens eine Stromlinie liegt überall dicht in  $\Omega$ . 2. Fast alle Stromlinien (im Sinne des arianten Maßes) liegen überall dicht in  $\Omega$ . 3. Metrische Transitivität. Jede bei Strömung invariante und meßbare Funktion in  $\Omega$  ist fast überall in  $\Omega$  konstant. — zieht (2), und (2) zieht (1) nach sich. (3) ist deshalb wichtig, weil diese Eigenschaft wendig und hinreichend für das strikt ergodische Verhalten der Strömung ist, d. h. für, daß die mittlere Verweilzeit eines mitgeführten Punktes in einem beliebigen Teil von  $\Omega$  im allgemeinen gleich dem invarianten Maß dieses Teiles ist (dividiert mit dem Maß von  $\Omega$ ). — (1) wurde im besagten Falle von Koebe, Löbell und Nielsen bewiesen, (2) von Myrberg und Hedlund. Es bedeutet einen wichtigen Fortschritt, daß dem Verf. der Beweis von (3) gelungen ist. — Zum Beweise sei nur folgendes angeführt. Die Fläche kann bekanntlich so auf das Innere des Einheitskreises  $E$  abgebildet werden, daß jedem Flächenpunkt unendlich viele Punkte von  $E$  entsprechen. Diese Punkte in  $E$  gehen alle auseinander durch eine Fuchssche Gruppe linearer Transformationen  $T$  mit  $E$  als Grenzkreis hervor. Der Flächenmetrik entspricht bei der hyperbolischen Maßbestimmung im Innern von  $E$  mit  $E$  als Fundamentalkreis. Diese kann dann so umgeformt werden: Jede meßbare Funktion  $f(\zeta_1, \zeta_2)$  zweier Punkte  $\zeta_1, \zeta_2$  auf  $E$ , die für alle Transformationen  $T$  der Fuchsschen Gruppe der Gleichung  $f(T(\zeta_1), T(\zeta_2)) = f(\zeta_1, \zeta_2)$  genügt, ist fast überall konstant. — Beim Beweise dieser Tatsache bedient sich der Verf. der von Nielsen herrührenden Darstellung der Randpunkte des Einheitskreises durch unendliche Folgen von Elementen  $T$  der Gruppe.

*E. Hopf (Watertown).*

**Wernick, Max: Über Minimalflächen im Großen.** Schr. math. Semin. u. Inst. Math. Univ. Berlin **2**, 35—64 (1934).

Das Verhalten einer Minimalfläche in einem Gebiet  $G$  heiße algebraisch, wenn es zu jedem Flächenpunkt eine räumliche Umgebung gibt, in der die Fläche mit einer Nullstellenmenge einer in  $G$  konvergierenden Potenzreihe zusammenfällt.  $\Sigma$  sei ein Minimalflächenstück, das von einem Polygon  $\Pi$  begrenzt wird, welches auch unendlich viele, sich aber im Endlichen nicht häufende Geradenstücke enthalten darf.  $\Sigma$  sei über  $\Pi$  hinaus analytisch fortsetzbar. Es wird danach gefragt, wann sich die unbeschränkte Fortsetzung entstehende Fläche im ganzen reellen Endlichen algebraisch verhält. Durch eine Klassifikation der Fortsetzungsgruppen werden sechs verschiedene Geradensysteme gefunden, auf denen  $\Pi$  liegen muß, es sei denn, daß die Fläche eine gemeine Schraubenfläche ist. Ferner muß sich natürlich (abgeschlossene) Flächenstück  $\Sigma$  selbst algebraisch verhalten. Bei beschränktem  $\Sigma$  sind diese Bedingungen auch hinreichend, nicht aber bei unbeschränktem. *Feller.*

**Franklin, Philip: Regions of positive and negative curvature on closed surfaces.** Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **13**, 253—260 (1934).

1. Beispiele zweiseitiger singularitätenfreier geschlossener Flächen vom Geschlecht 1 im dreidimensionalen Raum, auf denen die Punkte nichtnegativer Gaußscher Krümmung einen der abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphen Bereich bilden. Beispiel einer dem Torus homöomorphen Fläche, bei der die Punkte nichtpositiver Gaußscher Krümmung einen solchen Bereich bilden (die durch Fig. 4 angedeutete Übertragung der Konstruktion auf Flächen höheren Geschlechts ist fehlerhaft; der Bereich der Punkte nichtpositiver Gaußscher Krümmung hat in dieser Figur zwei getrennte Randkurven). 2. Einfacher Beweisansatz folgenden Satzes: Ein singularitätenfreier Bogen der parabolischen Kurve, der keinen Flachpunkt und keinen solchen Punkt enthält, in dem ein Normalschnitt der Fläche einen Wendepunkt hat, ist Krümmungslinie. Nach Ansicht des Ref. läßt sich aus der Singularitätenfreiheit des Bogens die Formel (7) nicht ohne weiteres  $c = d = 0$  ausschließen; das Glied  $o(R)$  könnte die Gestalt  $x(x^2 + y^2)$  haben. Vielleicht läßt sich der Ansatz trotzdem ausgestalten. 3. Einige Bemerkungen über die topologischen Indizes von Nabelpunkten. 4. Eine singularitätenfreie Modelle aller geschlossenen einseitigen Flächen; je nachdem die Eulersche Charakteristik gerade oder ungerade ist, hat man von der Kleinschen

oder der Boyschen Fläche auszugehen und Henkel anzubringen. 6. Es wird angegeklebt, daß auf der Boyschen Fläche der Bereich der Punkte nichtnegativer Gaußscher Krümmung dem Möbiusschen Bande homöomorph ist. Cohn-Vossen (Prag)

**Carrus, Sauveur:** Sur les trajectoires des méridiennes d'une surface de révolution. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 404—405 (1934).

Integrallose Darstellung aller Rotationsflächen mit ihren Trajektorien, die mit den Meridiankurven den festen Winkel  $\alpha$  bilden. Sei  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ,  $z = \varphi(r)$  mit willkürlichem  $\varphi(r)$  die allgemeine Rotationsfläche. Es zeigt sich: man kann  $\varphi(r)$  mit Hilfe einer Funktion  $v(t)$  in Parameterform darstellen in der Form

$\varphi = v'' \operatorname{sht} t + 2v' \operatorname{cht}$ ,  $r^2 = [v'' \operatorname{sh}^2 t + 2v' \operatorname{sht} \operatorname{cht} - v]^2 - [v'' \operatorname{sht} \operatorname{cht} + v'(1 + \operatorname{ch}^2 t)]$  so daß durch

$$\operatorname{th}[(\vartheta - \vartheta_0) \cotg \alpha] = \frac{v'' \operatorname{sht} \operatorname{cht} + v'(1 + \operatorname{ch}^2 t)}{v'' \operatorname{sh}^2 t + v' \operatorname{sht} \operatorname{cht} - v}$$

die Parameterdarstellung aller Trajektorien geliefert wird:  $\vartheta = \vartheta(t)$ ,  $r = r(t)$ .

Rellick (Göttingen))

**Jonas, Hans:** Ausdehnung der Bianchi-Transformation  $B_k$  auf gewisse zweifach unendliche Systeme kongruenter einschaliger Hyperboloide und damit verbundene Normalenkongruenzen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **17**, 264—301 (1934).

$H(a_1, a_2)$  sei eine zweiparametrische Schar kongruenter einschaliger Hyperboloide mit den beiden Regelscharen  $(g_i)$  ( $i = 1, 2$ ) auf jedem  $H$ . Die Schar  $H(a_1, a_2)$  soll die folgende Eigenschaft  $E$  haben: Variiert nur  $a_i$ , so soll bei diesem Bewegungsvorgang jeder Punkt von  $H$  sich senkrecht zur ihn tragenden Geraden aus  $(g_i)$  bewegen; die Scharparameter sind also den beiden Regelscharen eindeutig zugeordnet. Die Eigenschaft  $E$  kommt auf die Integration von 6 in den Ableitungen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung heraus; die unbekannten Funktionen sind die Komponenten der beiden Rotationsvektoren, die in der seit Darboux üblichen Weise festgelegt sind durch die Schar bestimmten 2-parametrischen Bewegungsvorgang definiert sind. Ein Spezialfall von  $E$  entsteht, wenn  $H(a_1, a_2)$  die Hyperboloide sind, die eine zu  $F$  isometrische Fläche  $F(a_1, a_2)$  in der durch die Isometrie vermittelten Korrespondenzen berühren. Dann sind  $a_i$  die Parameter der Asymptotenlinien von  $F$ . — Verf. entwickelt nun eine Reihe hauptsächlich liniengeometrischer zum Teil recht komplizierter Eigenschaften des allgemeinen Systems  $H$ , die im erwähnten Spezialfall Eigenschaften von Bianchi-Transformationen sind, aber gerade im allgemeinen Fall viel interessanter und reichhaltiger sind als bei der Spezialisierung. Andeutungen müssen hier genügen. 1.  $M(a_1, a_2)$  sei der mit  $H(a_1, a_2)$  starr verbundene Mittelpunkt der Hyperboloide. Dann gibt es (trivialerweise) in  $(g_i)$  genau zwei Geraden  $g_i, \bar{g}_i$ , die zum Vektor  $\frac{\partial M}{\partial a_i}$  orthogonal sind. Übrigens sind diese Geraden nicht starr mit  $H$  verbunden, sondern variieren in ihren Regelscharen. Nun wird bewiesen: Jede dieser 4 Geraden ( $i = 1, 2$ ) beschreibt eine Normalenkongruenz  $G_i$  bzw.  $\bar{G}_i$ . Jede dieser 4 Kongruenzen wird aber außer durch  $H(a_1, a_2)$  noch durch 3 weitere Systeme zu  $H$  kongruenter Hyperboloide von der Systemeigenschaft  $E$  erzeugt! Also besteht eine Art Dualität: Auf jedem Hyperboloid liegen 4 Kongruenzstrahlen, durch jeden Strahl gehen 4 Hyperboloide. Iteriert man, so erhält man ein unendliches System von Hyperboloiden und Strahlen von der Struktur eines unendlichen Schachbretts, wo die Felder die Hyperboloide, die Ecken die Strahlen vorstellen. — Im Spezialfall von  $E$  degeneriert das Schachbrett in zwei Flächen und zwei Strahlen. 2. Mit  $H$  sei ein zu  $H$  konfokales Hyperboloid  $H_k$  starr verbunden. Die Mannigfaltigkeit  $H_k$  hat natürlich nicht die Eigenschaft  $E$ . Aber man kann durch Integration einer Riccatischen Gleichung den von einer Regelschar  $(g_{k,i})$  von  $H_k$  beschriebenen Geradenkomplex in  $\infty^1$  Normalenkongruenzen  $G_{k,i}$  aufspalten, die sämtlich gemäß 1. durch Systeme von zu  $H$  (nicht zu  $H_k$ !) kongruenten Hyperboloiden erzeugt werden. Der Übergang von den Kongruenzen  $G$  zu den Kongruenzen  $G_k$  entspricht im Spezialfall von  $E$  einer Bianchitransformation und hat



ch im allgemeinen Fall zahlreiche Eigenschaften mit jener Transformation gemein. — Nach Ansicht des Ref. wäre es interessant, die Ergebnisse der Arbeit mit den Methoden der Liniengeometrie zu reproduzieren. Ferner liegt die Frage nahe, ob die Korrespondenz zwischen Graden und Hyperboloiden etwas mit Lies Geraden-Kugel-Transformation zu tun hat.

Cohn-Vossen (Prag).

**Behari, Ram:** *Equilateral osculating quadrics of ruled surfaces.* J. Indian Math. Soc. 212—221 (1934).

Verf. leitet die Bedingung ab, damit die quadratische Fläche, welche eine Regelfläche in den Punkten einer gegebenen Erzeugenden oskuliert, gleichseitig sei, und gibt einige Anwendungen. So findet er z. B. den Satz: Wenn die oskulierende quadratische Fläche einer Regelfläche, deren Erzeugende einer festen Ebene parallel sind, immer gleichseitiges Paraboloid ist, so ist die Regelfläche ein gerades Konoid. Weiter gibt er einen neuen Ausdruck für die Laguerresche Funktion  $\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{2}{\tau\gamma}$  einer Flächenkurve, worin  $R$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  die Strahlen der normalen Krümmung, der geodätischen Torsion und der geodätischen Krümmung der Kurve sind. Das identische Verschwinden dieser Funktion für eine Flächenkurve ist die Bedingung, damit die oskulierende quadratische Fläche der Regelfläche, welche von den Normalen der gegebenen Fläche in den Punkten der Flächenkurve gebildet wird, immer gleichseitig sei. Schließlich gibt Verf. noch einige Sätze über gleichseitige oskulierende quadratische Flächen. Der erste dieser Sätze lautet folgende: Wenn für eine Regelfläche  $R$  mit gleichseitigen oskulierenden quadratischen Flächen die Regelfläche, welche von den Normalen in den Punkten einer orthogonalen Trajektorie der Erzeugenden gebildet wird, auch gleichseitige oskulierende quadratische Flächen hat, so ist die orthogonale Trajektorie eine Kurve konstanter Krümmung.

G. Schaake (Groningen).

**Delgleize, A.:** *Sur les surfaces isothermiques et les surfaces de Guichard.* Bull. Acad. Sci. Belg., V. s. 20, 707—722 (1934).

Dans une Note récente [ce Zbl. 8, 412 (1934)] l'auteur a établi une transformation  $T$  qui généralise la transformation  $T_m$  des surfaces isothermiques et s'applique à un cas particulier des surfaces  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$  en transformation  $R$  (de Ribaucour). Les surfaces transformées  $T$  sont deux surfaces de Guichard associées  $(S)$ ,  $(S')$ . En appliquant à la surface  $(S)$  une transformation  $R$  l'auteur montre que, les constantes de la transformation bien choisies, le couple  $(S)$ ,  $(S_1)$  obtenu admet une transformation  $T$  qui le transmet en couple  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma_1)$ . D'où suit que les surfaces désignées au titre sont les seules qui admettent la transformation  $T$ . On peut représenter les  $S$  surfaces  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$ ,  $(S)$ ... par les sommets d'un parallélépipède dont les arêtes symbolisent les relations  $T$ ,  $R$  et  $G$  (associées de Guichard) qui relient chaque surface avec trois surfaces voisines.

S. Finikoff (Moscou).

**Elimoff, N.:** *Über diejenige Punktabbildung zweier Flächen, welche ihre Isometrie charakterisiert.* Rec. math. Moscou 41, 60—72 u. dtsh. Zusammenfassung 72 (1934) [russisch].

The paper is concerned with the existence of a representation of one surface upon another in which a geodesic net on one surface corresponds to a geodesic net on the other, the lengths of these geodesics being preserved. Such a correspondence is called 'geodesic fitting' (Bekleidung). The results of this paper may be summarised as follows: if the net is one of Tchebishev the surfaces are developable. If the surfaces are not those of Liouville then they are isometric. If one Liouville surface has the metric  $ds^2 = (U - V)(U du^2 - V dv^2)$  ( $U$  a function of  $u$  alone;  $V$  a function of  $v$  alone) then the other has the metric  $ds^2 = (U - V)[(U + C) du^2 - (V + C) dv^2]$  ( $C$  a constant). If the surfaces are also of constant curvature, the curvatures must be equal and the surfaces are isometric. Finally if two Liouville surfaces each having more than one Liouville isothermal admit a geodesic fitting, they are also isometric.

and the corresponding nets in general coincide upon application. The latter need happen only in case of surfaces applicable to a surface of revolution. *Knebelmann*

**Sauer, Robert:** Spannungszustände und projektive Transformationen. *Z. angew. Math. Mech.* **14**, 193—198 (1934).

Bekanntlich läßt sich der „Drehriß“ der infinitesimalen Flächenverbiegung auf weiteres auch zum Studium von Spannungszuständen in einer Flächenhaut heranziehen. Verf. überträgt die Ergebnisse seiner in diesem Zbl. **8**, 323, referierten differentialgeometrischen Arbeit auf die Spannungstheorie. Insbesondere wird die Tatsache herangezogen, daß die Ansätze eine gewisse projektive Invarianz besitzen. Die Darstellung ist auch für Nicht-Differentialgeometer leicht lesbar. Der Inhalt geht über das erwähnte insofern hinaus, als auch räumliche Spannungsfelder und das Verhalten der zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen bei projektiven Transformationen behandelt werden.

*Cohn-Vossen (Prag)*

**Môri, Yasuo:** Sur le faisceau canonique. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, **III**, s. 2, 265—267 (1934).

La conique canonique de Koenigs relative à un point  $P$  d'une surface  $S$  en  $P$  un contact du second ordre avec  $F$  et avec la quadrique de Lie relative à  $P$  [cfr. Môri, *Proc. Imp. Acad. Jap.* **10**, 311 (1934); ce Zbl. **9**, 270]; elle coupe doublement la quadrique de Lie dans un point, qui est joint à  $P$  moyennant une droite du faisceau canonique. Ici l'a. démontre la proposition suivante, dont il fait aussi quelques applications: le birapport formé par la droite susdite, la normale projective de Fubini, la tangente canonique et l'axe de Čech, est égal à la courbure totale,  $K$ , en  $P$  de la forme normale de Fubini,  $\varphi_2$ , relative à  $F$ .

*Segre*

**Rozet, O.:** Remarques sur les suites de Laplace de période quatre. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, **V**, s. **20**, 698—706 (1934).

L'a. a démontré que, afin qu'une congruence de droites ( $g$ ) non  $W$  de l'espace ordinaire appartienne à une suite de Laplace de période quatre, il est nécessaire et suffisant qu'on ait une grille sur l'hyperquadrique de Klein de l'espace  $S_5$ , en correspondance aux développables de ( $g$ ) [cfr. O. Rozet, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, **V**, s. **1**, 90 (1932); voir ce Zbl. **4**, 253; pour la théorie générale des grilles, voir B. Segre, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* **1** (1928)]. Ici l'a. fait d'abord quelques remarques relatives au rapportant à ce théorème; après il prouve qu'une suite de Laplace de période quatre dont les deux nappes focales soient en même temps des quadriques, est nécessairement une congruence  $W$ ; enfin il expose des considérations se rattachant à un exemple donné par G. Ttitzitéica (Géométrie différentielle projective des réseaux. Paris: Gauthier-Villars 1924, 185—186), concernant une suite de Laplace de période quatre circonscrite à deux quadriques de notre espace.

*Beniamino Segre (Bologna)*

**Tschech, Ernst:** Über Krümmungskreise im Riemannschen Raum. *Graz: Diss.* 1934. 22 Bl.

**Finzi, B.:** Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, **VI**, s. **19**, 578—584 (1934).

In this paper the concept of stress function (associated with the names of Airy, Maxwell, Morera) is extended to the case of media whose metric is not Euclidean but of constant curvature. The problem is to find a symmetric tensor  $\Phi^{rs}$  satisfying the equations  $\varphi^{r\alpha}_{,\alpha} = 0$ . In the case of two dimensions the solution is  $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\alpha} \varepsilon^{s\beta} \chi_{,\alpha\beta} + \kappa \chi g^{rs}$  where  $\varepsilon^{rs}$  is Ricci's alternating tensor,  $g^{rs}$  is the metrical tensor,  $\kappa$  is the constant of curvature and  $\chi$  is an arbitrary scalar. In the case of three dimensions the solution is  $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\alpha\beta} \varepsilon^{s\gamma\delta} \chi_{\beta\delta, \alpha\gamma} + \kappa (\chi^\alpha_\alpha g^{rs} - \chi^{rs})$  where  $\chi^{rs}$  is an arbitrary symmetric tensor of order two.

*Murnaghan (Baltimore)*

**Finzi, B.:** Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, **VI**, s. **19**, 620—623 (1934).

This is a continuation of a paper bearing the same title (see the prec. ref.). The principal result is that in flat space of four dimensions the general solution of the



tensor equations  $\varphi^{r\alpha}_{, \alpha} = 0$ ;  $\varphi^{rs} = \varphi^{sr}$  is furnished by  $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\lambda\sigma\tau} \varepsilon^{s\mu\alpha\beta} \chi_{\sigma\alpha\tau\beta, \lambda\mu}$  where  $\varepsilon$  is the Ricci alternating tensor and  $\chi_{pqlm}$  is symmetric in the pairs of indices  $pq$  and  $lm$ . An application is made to the dynamics of a material medium, and a generalization of Maxwell's stress functions is derived. A brief discussion of the extension of the theory to spaces of constant (non-zero) curvature is given. *Murnaghan.*

**Finzi, Bruno:** Su di una forma delle equazioni indefinite dei sistemi flessibili elastici. *Lombardo, Rend., II. s. 67, 261—269 (1934).*

This paper discusses, by the methods of tensor analysis, the equations of equilibrium of a two or three dimensional elastic medium in space of constant curvature (body forces being assumed absent). In the two dimensional case the stress tensor is furnished by the formulae  $\varphi^{ns} = \varepsilon^{n\alpha} \varepsilon^{s\beta} \chi_{, \alpha\beta} + k \chi g^{ns}$  where  $\varepsilon^{ns}$  is the Ricci alternating tensor,  $g^{ns}$  is the metrical tensor,  $\chi$  is the Airy stress function and  $k$  is the curvature constant. The stress function satisfies (provided the medium is homogeneous and isotropic) the equation  $\Delta_4 \chi + k(3 - \sigma) \Delta_2 \chi + 2k^2(1 - \sigma) \chi = 0$  where  $\sigma$  is Poisson's ratio. For the three dimensional case the stress tensor is furnished in terms of a symmetric tensor  $\chi_{ns}$  by means of the formulae:

$$\varphi^{ns} = \varepsilon^{n\alpha\lambda} \varepsilon^{s\beta\mu} \chi_{\lambda\mu, \alpha\beta} + k(\chi_{\alpha}^{\alpha} g^{ns} - \chi^{ns}).$$

satisfies the equations

$$\Phi_{\alpha}^{\alpha, ns} + (1 + \sigma) \Delta_2 \Phi^{ns} + 2k \left\{ \frac{1 - \sigma - \sigma^2}{1 - \sigma} \Phi_{\alpha}^{\alpha} g^{ns} - (1 + \sigma) \Phi^{ns} \right\} = 0.$$

*Murnaghan (Baltimore).*

**Kosambi, D. D.:** The problem of differential invariants. *J. Indian Math. Soc. 20, 15—188 (1934).*

In "Parallelism and path-spaces" (see *Math. Z. 37, 608—618*; this *Zbl. 7, 230*) the author has shown how a geometry can be associated with the differential equations  $\dot{x} + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$ . In this paper two procedures are given for obtaining the differential invariants of such a space. By the first method (of the author) they are obtained by means of the equations of variation. The second procedure is of E. Cartan. The space of  $(2n + 1)$  dimensions  $x, \dot{x}, t$  is considered. (E. Cartan, *Math. Z. 37, 619—622*; this *Zbl. 7, 231*.) By this method three invariant differential processes for vectors, corresponding with  $\partial/\partial x^i$ ,  $\partial/\partial \dot{x}^i$  and  $\partial/\partial t$ , and a complete set of differential invariants are obtained. *J. Haantjes (Delft).*

**Vranceanu, G.:** Étude des espaces non holonomes. *J. Math. pures appl., IX. s. 13, 13—174 (1934).*

Diese Arbeit kann als eine Fortsetzung der Arbeit „Studio geometrico dei sistemi non olonomi, prima parte“ [*Ann. Mat. pura appl., IV. s. 6, 9—43 (1928—1929)*] betrachtet werden. Es werden hier nicht nur einige neue Resultate mitgeteilt, sondern auch die in dem erschienenen Abhandlungen von Schouten, Synge und Horák, sowie die Arbeit von Hadamard [*Mém. Soc. Sci. Bordeaux, IV. s. 5 (1895)*] besprochen. Die Fundamentalformeln werden neu bewiesen, wodurch diese Arbeit auch unabhängig studiert werden kann. In den wichtigsten neuen Ergebnissen nennen wir das Studium der Abbildung einer non-holonomen Mannigfaltigkeit  $V_n^m$  auf sich selbst, wo im besonderen der Fall von konstanten Rotationskoeffizienten behandelt wird. Dann werden diese Mannigfaltigkeiten nach dem Beispiel von Killing und Bianchi auf ihre Invarianz bei einer kontinuierlichen Transformationsgruppe untersucht, wobei die  $V_3^2$  vollständig klassifiziert werden. Dabei werden die  $V_3^2$  konstanter Krümmung mit einer parametrisierten Transformationsgruppe speziell betrachtet. *Struik (Haarlem).*

**Peterson, T. S.:** The analogue of Weyl's conformal curvature tensor in a Michal functional geometry. *Ann. Mat. pura appl., IV. s. 13, 55—62 (1934).*

Two functional metric spaces are said to be conformal if and only if a functional  $\bar{g}_{\alpha\beta}[y(s)]$  exists such that  $\bar{g}_{\alpha\beta}[y(s)] = \lambda[y(s)] g_{\alpha\beta}[y(s)]$  and  $\bar{g}_{\alpha} = \lambda g_{\alpha}$ . The author gives the expressions for the four functional tensors which are independent of  $\lambda[y(s)]$ . The first of these  $\mathfrak{B}_{\alpha\beta\gamma}^i$  is the analogue of Weyl's conformal curvature tensor. The

expressions for these tensors become meaningless in case the interval of integration is either one or two but in these two cases the elimination of  $\lambda[y(s)]$  is easily performed. The vanishing of these four tensors is a necessary condition for the conformality of the mapping of the function space to a Euclidean function space but the sufficiency of this condition has not yet been established.

*M. S. Knebelman* (Princeton)

**Ancochea, G.: Invarianten eines Dreiergespinstes.** Rev. mat. hisp.-amer., I, 9, 54—63 (1934) [Spanisch].

Vgl. T 27, G. Bol und G. Howe, Invarianten von Differentiatorgespinsten [Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 8, 194 (1930)], wo auch die Invariantentheorie des Dreiergespinstes behandelt wird für den Fall, daß die drei Hauptinvarianten von drei verschiedenen Scharen der Kurvenscharen Flächen aufspannen. Verf. behandelt die daselbst nicht behandelten Fälle, wo also Flächen aufgespannt werden, und zwar mit Hilfe von dem Cartanschen Kalkül, und gibt an, wann das Gewebe in jedem Fall eine Gruppe gestattet.

*G. Bol* (Hamburg)

**Walberer, Paul: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LV. Orthogonale Kurvengewebe in Euklidischen Räumen.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 169—179 (1934).

Zu drei Kurvenscharen im dreidimensionalen Raum läßt sich leicht die allgemeine Riemannsche Metrik angeben, in bezug auf welche die drei Scharen orthogonal sind. Sind nämlich die drei Scharen Bahnkurven der Operatoren  $\Delta_i = q_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , und  $q_i^\mu q_k|_\mu = \delta_i^k$ , so leistet die zum Tensor  $g_{\nu\mu} = \sum_k \lambda_k q_k|_\nu q_k|_\mu$  gehörige Metrik, wo  $\lambda_k$  drei beliebige Funktionen sind, das Verlangte, und damit sind auch alle Lösungen der Aufgabe erschöpft. Verf. fragt, ob es hierunter auch Euklidische Maßbestimmungen gibt, und zeigt, daß dies immer der Fall ist und daß die möglichen Lösungen von 6 Funktionen von zwei Veränderlichen (und vier von einer Veränderlichen) abhängen. Zum Beweis bezieht man sich auf das von den Operatoren festgelegte (nicht holonome) Bezugssystem, und drückt die Komponenten der Krümmungsgröße in diesem System aus durch die „Klammerkoeffizienten“ der Operatoren, Nullsetzen der Krümmungsgröße gibt dann Differentialgleichungen für die Funktionen  $\lambda_k$ , es zeigt sich, daß diese ein Cauchy-Kowalewskisches System bilden. (LIV. vgl. dies. Zbl. 9, 327.) *G. Bol.*

**Blaschke, Wilhelm, und Paul Walberer: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LVI. Die Kurven-3-Gewebe höchsten Ranges im  $R_3$ .** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 180—200 (1934).

Vgl. T 48, W. Blaschke, Über Gewebe von Kurven im  $R_3$ , dies. Zbl. 7, 78. Es werden sämtliche 3-Gewebe des höchsten Ranges 5 angegeben. Das Ergebnis lautet: Man nehme im projektiven Raum von vier Dimensionen eine Hyperfläche dritter Ordnung. Darauf liegt eine zweigliedrige Schar reeller gerader Linien, die zu je dreien in einer Ebene liegen. Solcher Ebenen gibt es eine dreigliedrige Schar. Wir bilden durch zentrale Projektion diese Geraden und Ebenen ab auf den dreidimensionalen Raum und gehen hier zu der dualen Figur über. Diese bildet dann bis auf topologische Abbildungen das allgemeinste 3-Gewebe vom Rang 5. Bei der Wahl der Hyperfläche sind gewisse Sonderfälle auszuschließen und gewisse Realitätsannahmen zu machen. Der Beweis wird geführt mit Hilfe der Methode von T 50 (dies. Zbl. 7, 78), also durch Deutung der in den 5 vorhandenen Relationen vorkommenden Funktionen im projektiven 4-dimensionalen Raum, wo dann die erwähnte Hyperfläche nachweisbar ist. Umgekehrt werden bei vorgegebener Hyperfläche die Relationen explizit angegeben.

*G. Bol* (Hamburg).

**Blaschke, W.: Hexagonal 4-webs of surfaces in 3-space.** J. Indian Math. Soc. 20, 182—184 (1934).

A 4-web of surfaces in 3-space is called hexagonal if each surface of the web is intersected by those of the three sheaves it does not belong to in a 3-web of curves



ch is the topological equivalent of three pencils of straight lines. It is shown that most general hexagonal 4-web depends on three functions of one variable each.

G. Bol (Hamburg).

## Mechanik.

● Nielsen, J.: *Vorlesungen über rationelle Mechanik. II. Dynamik.* København: G. Gjøellerup 1934. 399 S. [Dänisch].

Pylarinos, O.: *Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface conique fixe.* Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 704—707 (1934).

This note presents an interesting discussion of the essentially elementary problem indicated by the title. In case the force is directed along the line joining the particle  $P$  and the vertex  $O$  of the given conical surface and depends in magnitude only upon the distance  $OP$ , the problem is integrable by quadratures. D. C. Lewis jr. (Princeton).

Khinchine, A.: *Fourierkoeffizienten längs einer Bahn im Phasenraum.* Rec. math. Moscou 41, 14—15 (1934).

With the aid of his simple proof (Math. Ann. 107, 485—488) of the Birkhoff Ergodic theorem (see this Zbl. 3, 256) the author proves the following generalization of that theorem: assuming (1), a measure preserving flow in a finite region  $V$ ; (2),  $f(x)$  summable over  $V$ ; and (3),  $\chi(t)$  a summable bounded periodic function of  $t$ ; then  $\lim t^{-1} \int_0^t \chi(\tau) f(T_\tau x) d\tau$ ,  $t \rightarrow \infty$ , exists for almost all  $x$  in  $V$ . As an immediate application it follows that the Fourier coefficient  $\lim t^{-1} \int_0^t e^{-i\lambda\tau} f(T_\tau x) d\tau$ ,  $t \rightarrow \infty$ , exists for almost all  $x$ .

G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Wintner, Aurel: *On the linear conservative dynamical systems.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 13, 105—112 (1934).

The author considers the dynamical system given by the  $2n$  differential equations in matrix form  $\dot{x} = -GH(x)$ , where  $H$  is symmetric and  $G = \begin{pmatrix} \omega & -\varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}$ ,  $\omega$  being a square allowed zero matrix and  $\varepsilon$  a unit matrix. A non-singular matrix  $C$ , which is ind. of  $t$ , a Hamiltonian matrix if  $x = Cy$  sends every such canonical system into a like system. The result is derived that  $C$  is Hamiltonian if, and only if,  $C'GC = sG$ ,  $|\det C| = |s^n| > 0$ , where  $C'$  is the transpose of  $C$ . Also any Hamiltonian matrix is the product of two like Hamiltonian matrices, one of which is positive definite and the other orthogonal. The question of the reducibility of (1) is discussed in relation to conditions of Weierstrass and Poisson. It is shown that the cyclic transformation group generated by the infinitesimal transformation (1) consists of Hamiltonian matrices. The results extend to Pfaffian systems.

G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Niemytski, V.: *Sur les systèmes dynamiques instables.* C. R. Acad. Sci., Paris 199, —20 (1934).

The solutions of the differential equations  $dx_i/dt = X_i(x_1, \dots, x_n)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), where the  $X_i$  are continuous in Euclidean  $n$ -space,  $E_n$ , and satisfy a Lipschitz condition in every bounded domain in this space, constitute the dynamical system under consideration. A trajectory (solution) is stable or unstable according as the points of the trajectory do or do not constitute a bounded set. A dynamical system is unstable if all the trajectories are unstable, and completely unstable if all points are wandering points (see Birkhoff, Dynamical Systems, p. 191). A dynamical system has a funnel (col) at infinity if there exists a sphere  $S$  such that given an arbitrary large positive number  $n$ , two points of  $S$  on the same trajectory can be found such that the trajectory between the points attains at least a distance  $n$  from the origin. This paper outlines a proof that instability of a dynamical system and absence of a funnel at infinity constitute necessary and sufficient conditions that there exist a homeomorphism of the trajectories of the system into a family of parallel straight lines in  $E_{n+1}$ . Hedlund.

**Hilmy, Heinrich:** Sur les mouvements stables au sens de Poisson et les mouvements récurrents d'un système dynamique. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 20—22 (1934).

This note states a number of interesting theorems on those motions of a dynamical system which are either recurrent or stable in the sense of Poisson (for definitions see Birkhoff, Dynamical Systems, Ch. VII). As an example of the results stated, let  $\omega$  be the set of  $\omega$  and  $\alpha$  limit points of a motion which is stable in the sense of Poisson but not recurrent. Then the set  $\Delta$  is the sum of three sets, no one of which is empty: (1) the sum of the minimal sets in  $\Delta$ ; (2) the set of points on motions which are stable in the sense of Poisson but not recurrent; (3) the set of points on motions which are not stable in the sense of Poisson in at least one direction. The last set is everywhere dense in  $\Delta$ .

G. A. Hedlund (Princeton).

**Eisenhart, Luther Pfahler:** Separable systems of Stäckel. Ann. of Math., II. s. 38, 284—305 (1934).

P. Stäckel in 1891 investigated the conditions under which the Hamilton-Jacobi equation associated with a dynamical system with  $n$  degrees of freedom can be dissociated into  $n$  equations of which each involves only one of the co-ordinates; and in 1893 he showed that this property (for systems with no potential energy) is connected with the possession of  $(n - 1)$  integrals each of which is represented by an expression quadratic in the velocities equated to an arbitrary constant. In the present paper the author makes considerable advances in this theory; among other results, he finds necessary and sufficient conditions that certain wave-mechanical equations of Schrödinger's type should be soluble by separation of variables, giving canonical forms for the equations which are reducible in the three-dimensional case: it is found that the orthogonal systems of co-ordinate surfaces which afford separation of variables are confocal quadrics. The work is extended to euclidean spaces of higher order, and to three-dimensional space of constant curvature.

Whittaker (Edinburgh).

## Quantentheorie.

● **Destouches, Jean-Louis:** Les principes de la mécanique générale. (Actualités scientifiques et industrielles. Nr. 140. Exposés de physique théorique. Publiés par Louis de Broglie. XI. Paris: Hermann & Cie. 1934. 53 S. Frs. 15.—).

Es soll eine zusammenfassende Darstellung der logischen (nicht der erkenntnistheoretischen) Grundlagen der verschiedenen Zweige der Quantenmechanik gegeben werden. Durch Lösung der Theorie von ihrem physikalischen Gehalt soll der mathematische Inhalt der Grundprinzipien geklärt und das logische Gerüst der verschiedenen Theorien vereinheitlicht werden. Dazu könnte man verschiedene Wege einschlagen. Verf. geht den Weg größtmöglicher Abstraktion und stellt eine allgemeine „Abstrakte Mechanik“ auf, die alle bestehenden mechanischen Theorien (vor allem diejenigen, die bei der sog. zweiten Quantelung eine Rolle spielen) umfassen soll. Der Raum, in dem diese Mechanik spielt, ist eine denkbar allgemeine mathematische Begriffsbildung: ein sog. abstrakter Raum (im Sinne von Fréchet), von dem nur vorausgesetzt wird, daß darin ein abstraktes Vektorensystem definiert ist (daneben hat der Raum separabel, vollständig und metrisch zu sein). Das Lehrgebäude der abstrakten Punktmechanik besteht einfach aus den folgenden Festsetzungen: 1. Ein ausgezeichnete Parameter spielt die Rolle der Zeit. Vermöge der Vektoren werden Bewegungen und Geschwindigkeiten definiert. 2. Die Bewegungsgröße: „Das ist eine gerichtete Größe (kein Vektor!) mit so vielen Komponenten, als der bewegliche Punkt Koordinaten hat.“ 3. Irgendeine Funktion wird zur Hamiltonschen ernannt, und damit werden formal die Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen hingeschrieben. (Die Übertragung eines anderen Prinzips wäre ebenfalls möglich. In diesen Festsetzungen hat man das mathematisch-logische Gerüst aller Punktmechaniken zu erblicken. Ähnlich, wenn auch entsprechend komplizierter, wird die Wellenmechanik abstrakt gefaßt, und auch die Übergänge von einer Mechanik zur anderen. Das ergibt eine Art von Klassifikation der erwähnten mechanischen Theorien. — Bei der Beurteilung dieser Arbeit hat der Physiker zu beachten, daß die Theorie nach Absicht des Verf. mindestens ebenso zur angewandten Logik zu zählen ist wie zur Mathematik oder Physik. Freilich ist es schwer zu sehen, wie sie in Zukunft für den Physiker eine ähnliche Rolle spielen soll wie die Theorie der abstrakten Räume für den Mathematiker.

Willy Feller (Stockholm).



**Schrödinger, E.:** Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen. Naturwiss. 518—520 (1934).

Es wird zunächst die bekannte unexakte Ausdrucksweise kritisiert, daß die Unimmtheiten in der Quantentheorie bereits aus der Existenz einer notwendig endlichen Wechselwirkung zwischen Meßapparat und Meßobjekt folgten. Dann wird auf hingewiesen, daß, obwohl die Natur im atomaren Gebiet den klassischen Gesetzen nicht folgt, der gesamte Begriffsapparat der klassischen Physik von der Quantenmechanik übernommen worden ist (alle an der Erfahrung prüfbar Aussagen der Quantenmechanik sind Prophezeiungen über die Messung klassisch definierter Größen (Ort, Energie usw.); und daß eben hieraus die Unbestimmtheiten hervorgehen. Im Gegensatz zur herrschenden Auffassung (vgl. N. Bohr, Atomtheorie und Naturbeschreibung. Berlin 1932) bezeichnet der Verf. diesen Zustand als unbefriedigend und schlägt für das, was bisher „Messung“ genannt wurde, den geistreicheren Ausdruck „Prokrustie“ vor. Er spricht die konkrete Hoffnung aus, daß die „Objektivität“ der Naturvorgänge wieder hergestellt werden könnte durch einen Verzicht auf die klassischen Begriffe, insbesondere diejenigen der Geometrie. Daß dieser Verzicht notwendig sein wird, wird durch eine nähere Untersuchung unserer Art der Begriffsdefinition wahrscheinlich gemacht.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Wentzel, Gregor:** Quantentheorie und Wellenmechanik. Physik regeln. Ber. 2, —152 (1934).

**Hoffmann, B.:** The new field theory. Nature 134, 322 (1934).

**Taub, A. H., O. Veblen and J. von Neumann:** The Dirac equation in projective geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 383—388 (1934).

Verf. untersuchen die möglichen Formen der Diracschen Gleichung in der projektiven Relativitätstheorie. Diese Gleichungen werden klassifiziert. Eine mögliche Gleichung reduziert sich in der speziellen Relativitätstheorie auf die gewöhnliche Diracsche Gleichung ohne Zusatzglieder und ist mit der ursprünglich von Fock gegebenen Gleichung äquivalent. Alle anderen enthalten Zusatzglieder, welche physikalisch einem Pol entsprechen. Zu ihnen gehören die von Schouten und van Dantzig vorgeschlagenen sowie eine von Pauli gegebene Gleichung. Die letztere ist die einfachste projektive Schreibweise, während in der affinen Schreibweise die anfangs erwähnte Gleichung ohne Zusatzglieder als die einfachere anzusehen ist.

V. Fock (Leningrad).

**Kothari, D. S.:** A note on „modification of Brillouin's unified statistics“. Philos. Mag., VII. s. 18, 192 (1934).

Kurze Bemerkung zu einer Verallgemeinerung der Fermi-Diracschen Statistik, die von Lindsay in Philos. Mag. VII. s. 17, 264 (dies. Zbl. 8, 281) veröffentlicht hat. Die von Lindsay angenommene Form der Verteilungsfunktion ist

$$N_i = \frac{2\pi g V (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{E_i^{1/2} dE_i}{a + e^{-\alpha + E_i/kT}}.$$

Es wird vom Verf. in folgender Weise umgeändert

$$N_i = \frac{2\pi g V (2m)^{3/2}}{(h a^{1/3})^3} \frac{E_i^{1/2} dE_i}{1 + e^{-\alpha' + E_i/kT}},$$

wo  $\alpha' = \alpha + \log a$  ist. Verf. macht darauf aufmerksam, daß die von Lindsay ausgeführte Modifikation nur in der Ersetzung von  $h$  in der gewöhnlichen Formel durch  $h a^{1/3}$  besteht und die von Lindsay erhaltenen Resultate [Formeln (7), (9), (10), (16), (25)] unmittelbar niedergeschrieben werden können. Das Gesagte gilt ebenso für die relativistische Statistik.

H. Slouka (Prag).

**Buhl, A.:** Sur l'extrême indétermination de certaines propagations liées à l'équation de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1391—1392 (1934).

Verf. versucht, seine Untersuchungen über Räume mit der Schrödingergleichung in Zusammenhang zu bringen.

V. Fock (Leningrad).



**Kwal, Bernard:** Sur les champs tensoriels qui accompagnent l'électron de Dirac. Théorie du neutrino et d'antineutrino. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 23—24 (1932).

**Broglie, Louis de:** L'équation d'ondes du photon. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 445—448 (1934).

Neuer, verbesserter Versuch zu der Idee, das elektromagnetische Feld als bilinear aus der Bildung herzuleiten aus einer Spinor-Wellenfunktion, für die jetzt 16 Komponenten angenommen werden. Sie genügt einer Wellengleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{lm} (A_1)_{ik,lm} \Phi_{lm} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{lm} (A_2)_{ik,lm} \Phi_{lm} + \frac{\partial}{\partial z} \sum_{lm} (A_3)_{ik,lm} \Phi_{lm},$$

wo die  $A$  gewisse, aus den Diracmatrizen gebildete Matrizen 16. Grades sind. Als Folge dieser Gleichung ergibt sich, daß für die in geeigneter Weise definierten linearen Feldstärken die Maxwell'schen Gleichungen automatisch gelten. *P. Jordan*.

**Andrade, E. N. da C.:** The new elementary particles. Nature **134**, 345—347 (1933).

**Placinteanu, J. J.:** L'équation ondulatoire d'un corps à masse variable. Application à la radioactivité. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 629—634 (1934).

Es wird versucht, die von Gamow gegebene Darstellung des radioaktiven Zerfalls als quantenmechanisches Analogon eines Spezialfalls einer von Levi-Civita aufgestellten Bewegungsgleichung für einen Körper von zeitlich veränderlicher Masse zu betrachten.

*O. Klein* (Stockholm).

**Gapon, E. N.:** Zur Theorie des spontanen Positronzerfalls. Z. Physik **90**, 279—282 (1934).

Durchrechnung der Energiebilanzen für die Kernumwandlungen von Be und B. Es wird gezeigt, daß aus den Messungen von Curie und Joliot über die induzierte Radioaktivität von Bor nicht auf die von den genannten Forschern angenommene große Masse des Neutrons geschlossen werden kann, wenn man die Möglichkeit in Betracht zieht, daß der nach dem  $\beta^+$ -Zerfall entstehende  $C_{13}$ -Kern sich zunächst in einem angeregten Zustand befindet und die Überschußenergie (die nach Curie und Joliot eben in der hohen Masse des Neutrons untergebracht werden mußte) in Form von  $\gamma$ -Strahlung emittiert.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Elsasser, W. M.:** Sur le principe de Pauli dans les noyaux. II. J. Physique Radium VII. s. **5**, 389—397 (1934).

Ausbau des Kernmodells, bei dem von  $\alpha$ -Teilchen im Kern in erster Näherung nicht gesprochen, sondern ein Schalenaufbau der Protonen und Neutronen je für sich angenommen wird. Die Aufeinanderfolge der Schalen kann so gewählt werden, daß die empirischen Stabilitätsgesetze eine befriedigende Darstellung finden. (I. vgl. dies. Zbl. **8**, 38).

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Chadwick, J., and M. Goldhaber:** A „nuclear photo-effect“: Disintegration of the dipylon by  $\gamma$ -rays. Nature **134**, 237—238 (1934).

Das Dipylon wird durch  $\gamma$ -Strahlung von Thorium C'' in ein Neutron und ein Proton zerlegt. Aus der Energiebilanz folgen für die Masse des Neutrons die Grenzen 1,0058 und 1,0086; der wahrscheinlichste Wert ist, unter Benutzung einiger nicht völlig sicherer Abschätzungen,  $1,0080 \pm 0,0005$ . Der Wirkungsquerschnitt ist mit der Berechnung aus dem Kernmodell von Heisenberg und Wigner im Einklang; damit ist zugleich gezeigt, daß die von Lea bei Bombardement von Paraffin mit Neutronen beobachtete intensive  $\gamma$ -Strahlung nicht aus der Vereinigung  ${}_0n^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1D^2 + h\nu$  hervorgehen kann.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Oseen, C. W.:** Deux remarques sur la méthode des perturbations dans la mécanique ondulatoire. Ark. Mat. Astron. Fys. **25** A, Nr 2, 1—13 (1934).

Im ersten Teil dieser Note bespricht Verf. die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Starkeffekt des  $H$ -Atoms. Es wird darauf hingewiesen, daß die Energie  $eFz$  im elektrischen Feld eigentlich nicht als Störungspotential behandelt werden darf. Sie bedingt nämlich, daß die Eigenwerte der Wellengleichung nicht reell, sondern komplex



Durch Nichtbeachtung dieser Tatsache kam Schrödinger zu dem Fehlschluß, das Eigenwertspektrum diskret ist. In Wirklichkeit aber ist es kontinuierlich, dann ist die Anwendung einer Störungsrechnung nicht ohne weiteres erlaubt. — zweite Teil der Note enthält kritische Bemerkungen zur Störungsrechnung von Slater und London bei der chemischen Bindung in  $H_2$ . Es wird gezeigt, daß diese f. bei der Bestimmung der Störungsenergie erster Ordnung eine Gleichung ben, die auf einer willkürlichen mathematischen Annahme beruht.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Brillouin, Léon: Le modèle d'atome de Fock-Dirac et l'existence des potentiels** *Physique Radium*, VII. s. 5, 185—192 (1934).

Die Arbeit enthält eine eingehende Diskussion der von Dirac auf Grund der Thomas-Fermischen Gleichung mit Austauschkorrek- Verf. schreibt diese Gleichung in der Form

$$\Delta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{2\varepsilon^2}{h} p \right) = \begin{cases} \frac{32\pi^2\varepsilon^2 p^3}{3h^3} & \text{innerhalb des Atomrumpfes} \\ 0 & \text{außerhalb des Atomrumpfes.} \end{cases}$$

in  $p$  lineare Glied muß nach Verf. die Hälfte des von Dirac gegebenen Wertes n. Die Diskussion der Gleichung wird zunächst für den zentralsymmetrischen eines Atoms und dann für den eindimensionalen Fall eines Metalls durchgeführt. Betrachtung eines neutralen Atoms ergibt als Näherung für die Ionisierungs- nung den (freilich viel zu kleinen) konstanten Wert  $\frac{2m\varepsilon^3}{h^2} = 1,37$  Volt; derselbe ergibt sich auch für den Fall eines Metalls.

*V. Fock* (Leningrad).

**Jensen, H.: Über den Austausch im Thomas-Fermi-Atom.** *Z. Physik* 89, 713 19 (1934).

Verf. leitet die im voranstehenden Referat angeführte Thomas-Fermische Gleichung mit Austausch aus einem Variationsprinzip ab; dabei wird nach Bloch für die tauschenergie pro Volumeinheit“ ein der Potenz  $4/3$  der Ladungsdichte proportionale Ausdruck benutzt. (Das Austauschglied unterscheidet sich — ebenso wie bei Brillouin — von dem Diracschen Wert um einen Faktor  $1/2$ .) Zur approximativen Lösung der Gleichung und Abschätzung der Austauschkorrektur wird das Ritzsche Verfahren angewandt. Zum Schluß wird die durch den Austausch bedingte Änderung des Virialsatz der Thomas-Fermischen Theorie kurz besprochen.

*V. Fock.*

**Pincherle, Leo: Autofunzioni per elettroni di elementi pesanti.** *Nuovo Cimento*, 11, 372—379 (1934).

Es wird das Thomas-Fermische Feld in schweren Atomen durch ein anderes zentral-symmetrisches Feld ersetzt, das zwei willkürliche Konstanten enthält und, wie zuerst Eckart gezeigt, eine strenge Lösung des Eigenwertproblems erlaubt. Durch geeignete Wahl der Konstanten wird das Ersatzfeld soviel wie möglich dem Thomas-Fermischen Feld im Atominneren angepaßt. Für den Fall des Wolframs werden einige Wellenfunktionen berechnet und graphisch dargestellt. Sie werden zur Bestimmung der Intensität von Röntgenlinien herangezogen.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Ufford, C. W., and F. M. Miller: Relative multiplet transition probabilities from spectroscopic stability.** *Physic. Rev.*, II. s. 46, 283—285 (1934).

Berechnung der relativen Intensitäten von Multipletts, die aus gewissen Elektronenkonfigurationen hervorgehen, unter Zugrundelegung der Wellenmechanik.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Penney, W. G., and G. B. B. M. Sutherland: The theory of the structure of hydrogen cyanide and hydrazine.** *J. chem. Phys.* 2, 492—498 (1934).

Es wird untersucht, welche Form der Moleküle  $HO-OH$  und  $H_2N-NH_2$  die wahrscheinlichste ist. Die Elektronen der beiden zentralen Atome O bzw. N haben die Tendenz, die stärkste mögliche Bindung dieser Atome hervorzurufen. Dies bringt aber mit sich, daß die Bindungen nach den H-Atomen bei  $HO-OH$  nicht in der Verlängerung der



Richtung O—O liegen wegen der räumlichen Dichteverteilung der  $p$ -Elektronen Grund der Wellenmechanik; ferner daß die beiden Endgruppen nicht in derselben Ebene, sondern in Ebenen liegen, die um etwa  $90^\circ$  gegeneinander gedreht sind. genannten Moleküle sind also sehr unsymmetrisch und haben jedenfalls keine Drehbarkeit der Endgruppen.

R. de L. Kronig (Groningen)

**Witmer, Enos E.:** The thermodynamic functions of a diatomic gas whose molecule have a multiplet normal electronic state belonging to Hund's case (a). J. chem. Phys. 2, 618—619 (1934).

## Kristallographie.

**Seitz, F.:** A matrix-algebraic development of the crystallographic groups. I. Kristallogr. A 88, 433—459 (1934).

Es werden die 32 Kristallklassen als Gruppen dreireihiger Matrizen rechnerisch hergeleitet. Für die nichtkubischen Gruppen wird eine reduzible Darstellung gewählt, indem nach einer Achse und der zu ihr senkrechten Ebene zerspalten wird. Die Drehungen in dieser Ebene werden reell geschrieben, so wie es die Anschauung suggeriert. Die verschiedenen möglichen Gruppen ergeben sich durch die Beschränkung der Ordnung der Gruppenelemente auf 1, 2, 3, 4 und 6 und durch Hinzufügung der Spiegelungen an jeder Ebene, die mit der Ordnungsbeschränkung verträglich ist oder durch Hinzunahme von Drehspiegelungen und der Inversion, d. i. die mit  $-1$  multiplizierte Heeschmatrix. Die Anzahl dieser nichtkubischen Gruppen ist 27. Alsdann verbleiben die Fälle, in denen es mehr als 2 Richtungen gibt, in denen Drehachsen einer Ordnung  $\geq 3$  vorliegen. Die Ausübung der 5 kristallographisch zuzulassenden Fälle geschieht durch Aufrechthaltung der Ordnungsbeschränkung auch für Drehachsen, die Produkt zweier jener erstgenannten Drehungen sind. Bei der Aufzählung gelten zwei Gruppen als verschieden, wenn ihre Darstellungen verschieden sind. Tatsächlich ist das Resultat dasselbe wie bei dem Standpunkt der algebraischen Äquivalenz, von Frobenius in den Berliner Sitzungsberichten 1911, 681, durchführte. — Druckfehler S. 449: die erste Gruppe ist  $D_{3d}$  (statt  $D_6$ , das S. 450 richtig steht). S. 441: das letzte Glied der zweiten Matrix der Gruppe  $V$  ist  $-1$  (statt  $+1$ ), S. 447: fürs letzte Glied der 6. Matrix der Gruppe  $D_4$  steht  $+1$  (statt  $-1$ ), diese Gruppe enthält die Inversion nicht.

Heesch (Göttingen)

**Hermann, C.:** Tensoren und Kristallsymmetrie. Z. Kristallogr. A 89, 32—48 (1935).

Im Gegensatz zu den isotropen Körpern hängen in anisotropen Körpern die Materialkonstanten im allgemeinen von der Richtung ab. Anstatt sie in kristalliner Materie nun als skalare Größen und zugehöriger Richtung anzugeben, entwickelt Verf. ein Verfahren, sie als Komponenten von Tensoren zu schreiben, die die Symmetrioperationen des Kristalles gestatten. Als Achsen werden Symmetrieachsen verwendet und das Problem wird dadurch zu dem einer Hauptachsentransformation. Für spezielle Symmetrieelemente reduziert sich dabei die Anzahl der Tensorkomponenten erheblich; umgekehrt gelingt hierdurch eine Zusammenfassung von verschiedenen Kristallklassen. Am Beispiel des Elastizitätstensors wird die Methode erläutert.

J. J. Burckhardt (Zürich)

**Schiff, Käthe:** Zur Bestimmung mehrparametrischer Kristallstrukturen: Ein graphisches Verfahren auf Grund von Intensitätsschätzungen. Z. Kristallogr. A 88, 255—262 (1934).

Die Amplituden der Reflex-Intensitäten zweier Flächen  $F$  und  $F'$  sind in speziellen (aufgezählten) Fällen reell darstellbar durch  $A = f(s) + g(t)$  und  $A' = f'(s) + g'(t)$ ,  $s$  und  $t$  sind die gesuchten Parameter. Es kann dann durch geeignete Konstruktion der Funktionen  $f$  und  $g$  einerseits sowie  $f'$  und  $g'$  andererseits und gegenseitiges Verschieben der Konstruktionen die  $s$ - $t$ -Ebene eingeteilt werden in Gebiete, in denen  $|A| > |A'|$  und  $|A| < |A'|$ . Ausdehnung des Verfahrens auf mehrere Parameter ist kurz angedeutet.

F. Laves (Göttingen)